Cálculo diferencial

Capítulo 1

Relaciones y funciones

Reseña HISTÓRICA

La aparición del análisis infinitesimal fue la culminación de un largo proceso, cuya esencia matemática interna consistió en la acumulación y asimilación teórica de los elementos del cálculo diferencial.

Para el desarrollo de este proceso se contaba con el álgebra; las técnicas de cálculo; introducción a las matemáticas variables; el método de coordenadas; ideas infinitesimales clásicas, especialmente de Arquímedes; problemas de cuadraturas y la búsqueda de tangentes. Las causas que motivaron este proceso fueron las exigencias de la mecánica newtoniana y la astronomía.

La última etapa del desarrollo del análisis infinitesimal fue el establecimiento de la relación e inversibilidad mutua entre las investigaciones diferenciales, y a partir de aquí la formación del cálculo diferencial.

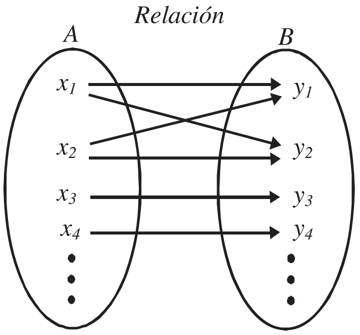
El cálculo diferencial surgió casi simultáneamente en dos formas diferentes: en la forma de teoría de fluxiones de Newton y bajo la forma del cálculo de diferenciales de G. W. Leibniz.

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646-1716)

Relación

Regla de correspondencia entre los elementos de dos conjuntos.

Ejemplo



Esta relación se representa con el siguiente conjunto de pares ordenados

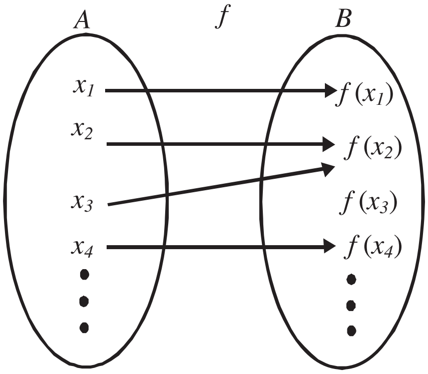
$$R = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)\ldots\}$$

Función

El concepto de función es uno de los más importantes en el mundo de las matemáticas. Las funciones no sólo representan fórmulas, o lugares geométricos, también se utilizan como modelos matemáticos que resuelven problemas de la vida real.

A continuación se dan algunas definiciones de función:

- Es una regla de correspondencia que asocia a los elementos de dos conjuntos. La cual a cada elemento del primer conjunto (dominio) le asocia un solo elemento del segundo conjunto (contradominio).
- Sean A y B dos conjuntos y f una regla que a cada $x \in A$ asigna un único elemento $f(x)$ del conjunto B, se dice que f es una función que va del conjunto A al B, y se representa de la siguiente forma: $f: A \rightarrow B$, donde al conjunto A se le llama dominio y al B contradominio, que también se representa por medio de un diagrama de flechas:

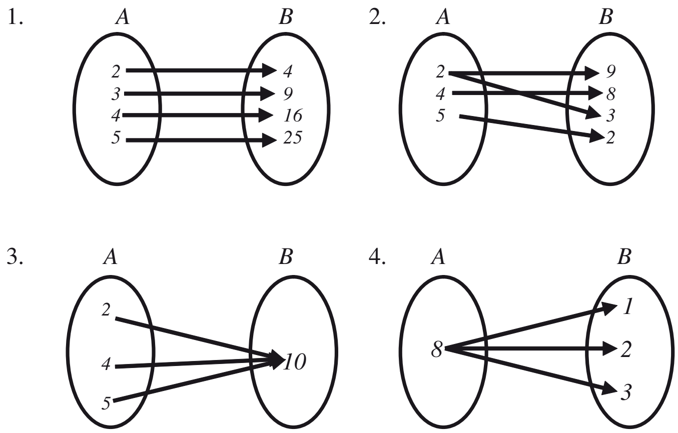


- Una función es una colección de pares ordenados con la siguiente propiedad: Si (a, b) y (a, c) pertenecen a una colección, entonces se cumple que $b = c$; es decir, en una función no puede haber dos pares con el mismo primer elemento.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina si los siguientes diagramas representan una función o una relación:



Solución

El primer y el tercer diagramas corresponden a una función ya que a cada elemento del conjunto A se le asigna un solo elemento del conjunto B.

En el segundo diagrama al menos a un elemento del conjunto A se le asignan dos elementos del conjunto B, mientras que en el cuarto diagrama el elemento 8 se asocia con tres elementos del conjunto B, por tanto, se concluye que estos conjuntos representan una relación.

2 Determina si los siguientes conjuntos de pares ordenados corresponden a una función o a una relación:

$$A = \{(-2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25)\}$$

$$B = \{(3, 2), (3, 6), (5, 7), (5, 8)\}$$

$$C = \{(2, 4), (3, 4), (5, 4), (6, 4)\}$$

$$M = \{(2, 4), (6, 2), (7, 3), (4, 12), (2, 6)\}$$

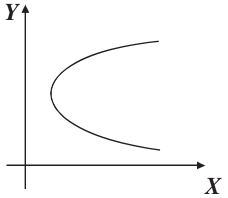
Solución

Los conjuntos A y C son funciones ya que el primer elemento de cada par ordenado no se repite. En el conjunto B el 3 y el 5 aparecen dos veces como primer elemento del par ordenado mientras que en el conjunto M al 2 se le están asignando el 4 y el 6 como segundo elemento, por tanto, B y M son relaciones.

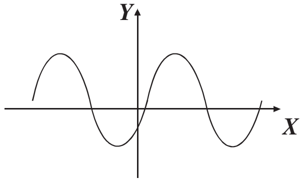
Las funciones y relaciones pueden tener una representación gráfica en el plano cartesiano. Para distinguir si se trata de una función o una relación basta con trazar una recta paralela al eje "Y" sobre la gráfica; si ésta interseca en dos o más puntos es una relación, si sólo interseca un punto será una función.

3 Determina si las siguientes gráficas representan una relación o una función.

1.



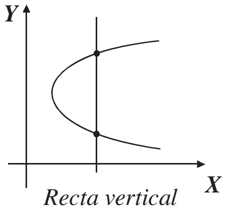
2.



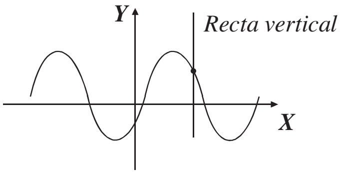
Solución

Se traza una recta vertical en ambas gráficas y se observa que en la primera interseca en dos puntos a la gráfica, por tanto, representa una relación y en la segunda, la recta vertical interseca en un punto a la gráfica, por consiguiente representa una función.

1.



2.



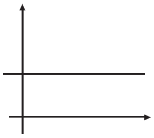
EJERCICIO 1

Identifica si los siguientes conjuntos representan funciones o relaciones.

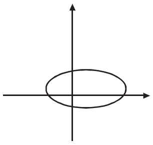
1. $\{(0, 3), (2, 3), (-1, 3)\ldots\}$
2. $\{(-3, 5), (3, 5), (-3, 2)\ldots\}$
3. $\{(4, 7), (-4, \sqrt{3}), (\sqrt{2}, 5)\ldots\}$
4. $\{(2, 5), (\sqrt{4}, 2), (3, -3)\ldots\}$
5. $\{(a, 2a), (-2a, 3a), (4a, a)\ldots\}$
6. $\left\{\left(\frac{3}{2}, 1\right), \left(\frac{6}{4}, -1\right), \left(1, \frac{5}{2}\right)\ldots\right\}$

Identifica qué representa cada gráfica (función o relación):

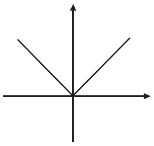
7.



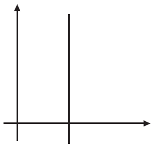
8.



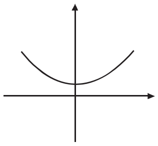
9.



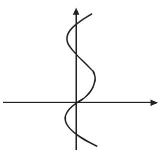
10.



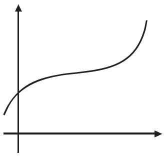
11.



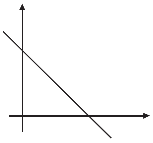
12.



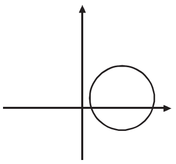
13.



14.



15.



Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Notación

Una función se denota o escribe como $y = f(x)$, donde:

x: variable independiente.

y: variable dependiente.

f: función, regla de asignación o correspondencia.

Clasificación

Las funciones se clasifican en: *algebraicas* y *trascendentes*

$$\text{Función}\begin{cases}\text{Algebraicas}\\ \text{Trascendentes}\begin{cases}\text{Trigonométricas}\\ \text{Inversas trigonométricas}\\ \text{Exponenciales}\\ \text{Logarítmicas}\end{cases}\end{cases}$$

Ejemplos

Algebraicas

$f(x) = x^3 - 4x$ $\qquad f(x) = \sqrt{x-4}$ $\qquad y = |x|$

$y = 3x^2 - 5x - 6$ $\qquad g(x) = \sqrt[3]{x} + 1$ $\qquad g(x) = |x - 2| - 1$

Trascendentes

$f(x) = \cos x$ $\qquad f(x) = e^{4x}$ $\qquad s(t) = \ln(2t - 4)$

$f(x) = \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{2})$ $\qquad y = e^{\sqrt{x}} + 2$ $\qquad g(x) = \log(x + 1)$

Las funciones algebraicas y trascendentes pueden ser:

- **Explícitas**
  Es cuando la función está en términos de una variable, por ejemplo:

$y = x^2$ $\qquad f(x) = \dfrac{x-3}{x+5}$ $\qquad y = \operatorname{sen} 3x$ $\qquad s(t) = e^t$ $\qquad y = \log x$

$y = x^3 - 1$ $\qquad g(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$ $\qquad f(x) = \cos\dfrac{1}{2}x$ $\qquad g(x) = 2^{x+3}$ $\qquad f(x) = \ln(3x)$

- **Implícitas**
  Es cuando ambas variables forman parte de la ecuación, por ejemplo:

$x^2 - 8y + 16 = 0$ $\qquad x^3 + y^2 - 3x = 0$ $\qquad \operatorname{sen} x + \cos y = 1$ $\qquad e^y = x + 3$

Las funciones que se estudiarán en este libro siempre tomarán valores de números reales tanto para la variable independiente como para la dependiente.

Valor de una función

El valor real $f(x)$ de una función es aquel que toma y cuando se asigna a x un determinado valor real.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén $f(-3)$ para $f(x) = 3x^2 - 5x - 2$

Solución

Para obtener $f(-3)$ se sustituye $x = -3$ en la función y se realizan las operaciones indicadas,

$$f(-3) = 3(-3)^2 - 5(-3) - 2 = 27 + 15 - 2 = 40$$

Por tanto $f(-3) = 40$, es decir $y = 40$ cuando $x = -3$ o lo que es lo mismo, la curva pasa por el punto $(-3, 40)$ en el plano cartesiano.

2 Si $f(x) = \dfrac{3x-1}{5-x}$, encuentra $f\left(\dfrac{3}{4}\right)$

Solución

Se sustituye $x = \dfrac{3}{4}$ en la función y se realizan las operaciones:

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3\left(\frac{3}{4}\right)-1}{5-\frac{3}{4}} = \frac{\frac{9}{4}-1}{5-\frac{3}{4}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{17}{4}} = \frac{5}{17}\text{, por tanto, cuando } x = \frac{3}{4},\ f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{17}$$

3 Si $s(t) = \sqrt{t-5}$, determina $s(4)$, $s(a+5)$

Solución

$s(4) = \sqrt{4-5} = \sqrt{-1}$, la función no está definida para $t = 4$, $\sqrt{-1}$ no tiene solución real

$$s(a+5) = \sqrt{a+5-5} = \sqrt{a}$$

4 Si $f(x) = \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$, determina $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

Solución

Se sustituye $x = \dfrac{\pi}{3}$, en $f(x)$ y se utiliza la identidad $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cos\alpha$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

5 Determina $\dfrac{f(a+b)-f(a)}{b}$ si $f(x) = \sqrt{x}$

Solución

Se obtiene que $f(a+b) = \sqrt{a+b}$ y $f(a) = \sqrt{a}$

Se sustituyen los valores obtenidos:

$$\frac{f(a+b)-f(a)}{b} = \frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}}{b}$$

Un resultado equivalente se obtiene al racionalizar el numerador:

$$\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}}{b}\cdot\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}=\frac{\left(\sqrt{a+b}\right)^2-\left(\sqrt{a}\right)^2}{b\cdot\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a}\right)}=\frac{b}{b\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a}\right)}=\frac{1}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}$$

Finalmente, el resultado de $\frac{f(a+b)-f(a)}{b}=\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}}{b}=\frac{1}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}$

6 Si $y=\frac{x}{x+2}$, encuentra el valor de y cuando $x=-2$

Solución

Al evaluar la función en $x=-2$, se obtiene:

$$y=\frac{-2}{-2+2}=-\frac{2}{0}$$

La función no está definida para $x=-2$, ya que la división entre cero no está determinada.

7 Si $f(x)=x^2-1$, demuestra que $f\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{f(x)}{x^2}$

Demostración

Se sustituye $\frac{1}{x}$ en la función:

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2-1=\frac{1}{x^2}-1=\frac{1-x^2}{x^2}=\frac{-\left(-1+x^2\right)}{x^2}=-\frac{x^2-1}{x^2}$$

Pero $x^2-1=f(x)$

Por tanto, $f\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{f(x)}{x^2}$

EJERCICIO 2

Evalúa las siguientes funciones:

1. Si $f(x)=2x^2-3$, obtén $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(3)$, $f(0)$
2. Si $f(x)=x^2-5x+6$, determina $f(a)$, $f(a+b)$
3. Si $f(x)=3x^2+4x-2$, determina $f(x+h)$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
4. Si $f(x)=\frac{2x-1}{2x+1}$, determina $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(x+h)-f(x)$
5. Si $f(x)=\sqrt{x^2-16}$, determina $f(5)$, $f(4)$, $f(6)$, $f(3)$
6. Si $f(x)=\sqrt{x^2-3}$, determina $f(x+h)$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

7. Si $f(x) = \frac{1}{x+1}$, determina $\frac{f(x+b)-f(x)}{b}$

8. Si $f(x) = \sqrt{1-x}$, determina $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

9. Si $f(x) = \frac{|x-5|}{x+2}$, determina $f(1)$, $f(0)$, $f(x+5)$

10. Si $f(x) = -3x^2 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x}$, determina $f(-1)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$

11. Si $f(x) = x^2 - 3x$, demuestra que $f(3x) - f(x-1) = 4(x-1)(2x+1)$

12. Si $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$, demuestra que $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

13. Si $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$, demuestra que $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$

14. Si $f(x) = \tan x$, demuestra que $f(x) = f(x+3\pi)$

15. Si $f(x) = \cos 2x$, demuestra que $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -f(x)$

16. Demuestra que para $f(x) = \sqrt{x-2}$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{f(x+h)+f(x)}$

17. Si $h(x) = \sqrt{x^2-4}$, $r(x) = \sqrt{x^2+4}$, demuestra que $h\left(n+\frac{1}{n}\right) + r\left(n-\frac{1}{n}\right) = 2n$

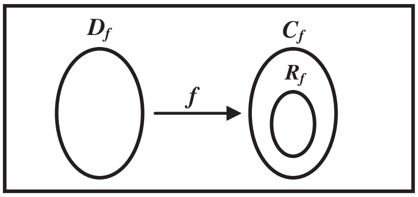
18. Si $f(s) = \frac{s-1}{s+1}$, demuestra que $\frac{f(m)-f(n)}{1+[f(m)][f(n)]} = \frac{m-n}{1+mn}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Dominio, contradominio y rango de una función

Dada una función $f: A \rightarrow B$, se dice que el conjunto A es el **dominio** (D_f) y B el **contradominio** (C_f) o codominio de f. En términos del plano cartesiano, el dominio corresponde al conjunto formado por los valores posibles para X mientras que el contradominio corresponde a los valores posibles para Y.

- **Rango (R_f)**
  Valores del contradominio para los cuales $y = f(x)$, siendo $f(x)$ la imagen de x.



EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = 3x^2 - 5x - 6$?

Solución

La función es polinomial, x puede tomar cualquier valor, por tanto, el dominio son todos los números reales, es decir $x \in R$ o dicho de otra forma $x \in (-\infty, \infty)$.

2 Determina el dominio de la función $f(x) = \dfrac{x-3}{x+5}$

Solución

La función es racional y el denominador debe ser distinto de cero, ya que la división entre cero no está definida, por tanto, se busca el valor para el cual $x + 5 = 0$ obteniendo $x = -5$, entonces el dominio es: $D_f = \{x \in R \mid x \neq -5\}$ o bien $x \in (-\infty, -5) \cup (-5, \infty)$.

3 ¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 5x - 6}$?

Solución

Al factorizar el denominador se obtiene: $f(x) = \dfrac{x}{(x-6)(x+1)}$, el denominador se hace cero para

$$x = 6 \quad \text{o} \quad x = -1, D_f = \{x \in R \mid x \neq -1, x \neq 6\} \quad \text{o bien} \quad \{x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 6) \cup (6, \infty)$$

4 Determina el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x-5}$

Solución

El radicando debe ser mayor o igual a cero (ya que no hay valor real para raíces cuadradas de números negativos) es decir $x - 5 \geq 0$, de donde $x \geq 5$, por tanto $D_f = \{x \in R \mid x \geq 5\}$ o bien $x \in [5, \infty)$

5 Encuentra el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$

Solución

Se plantea la desigualdad $x^2 - 16 \geq 0$, al resolverla se obtiene que el dominio es el conjunto $D_f = \{x \in R \mid x \leq -4 \text{ o } x \geq 4\}$ o bien $x \in (-\infty, -4] \cup [4, \infty)$

6 Determina el dominio de la función $f(x) = \log(2x - 3)$

Solución

Para determinar el dominio de esta función se debe tomar en cuenta que $\log_b N = a$, para $N > 0$, por tanto, se plantea la desigualdad y se resuelve:

$$2x - 3 > 0 \quad \rightarrow \quad 2x > 3 \quad \rightarrow \quad x > \frac{3}{2}$$

Entonces, el dominio es el conjunto $D_f = \left\{x \in R \mid x > \dfrac{3}{2}\right\}$, o bien, $x \in \left(\dfrac{3}{2}, \infty\right)$

7 Encuentra el rango de la función $f(x) = \frac{6x+1}{1+3x}$

Solución

Se despeja x:

$$y = \frac{6x+1}{1+3x} \quad \rightarrow \quad y(1 + 3x) = 6x + 1 \quad \rightarrow \quad y + 3xy = 6x + 1$$

$$3xy - 6x = 1 - y \quad \rightarrow \quad 3x(y - 2) = 1 - y \quad \rightarrow \quad x = \frac{1-y}{3(y-2)}$$

El denominador se hace cero cuando $y = 2$, por tanto el rango es el conjunto:

$$R_f = \{y \in R \mid y \neq 2\} \text{ o bien, } y \in (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$$

8 Determina el rango de la función $y = \sqrt{9 - x^2}$

Solución

$y \geq 0$, porque la raíz es positiva o cero, se despeja x:

$$y = \sqrt{9 - x^2} \quad \rightarrow \quad y^2 = 9 - x^2 \quad \rightarrow \quad x^2 = 9 - y^2 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{9 - y^2}$$

Se plantea la desigualdad $9 - y^2 \geq 0$, al resolverla se obtiene que $y \in [-3, 3]$, pero $y \geq 0$, por tanto, el rango es el conjunto $R_f = \{y \in R \mid 0 \leq y \leq 3\}$, o bien, $y \in [0, 3]$

EJERCICIO 3

Determina el dominio de las siguientes funciones:

1. $f(x) = x^2 - 4$
2. $f(x) = 3x^3 - 2$
3. $f(x) = \frac{x}{x+3}$
4. $f(x) = \frac{x-4}{5-x}$
5. $f(x) = \frac{3}{x^2-16}$
6. $f(x) = \frac{x-3}{x^2-5x}$
7. $f(x) = \frac{1}{x^2-7x+10}$
8. $f(x) = \frac{x-1}{25-x^2}$
9. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$
10. $f(x) = \frac{x-3}{2x^2+10x}$
11. $f(x) = \frac{1}{x^3-x}$
12. $f(x) = \sqrt{x+1}$
13. $f(x) = \sqrt{x-6}$
14. $f(x) = \sqrt{2-x}$
15. $f(x) = \sqrt{12-3x}$
16. $f(x) = \sqrt{x^2-25}$
17. $f(x) = \sqrt{x^2-5x-6}$
18. $f(x) = \sqrt{36-x^2}$

19. $f(x) = \sqrt{9+x^2}$

20. $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$

21. $f(x) = \sqrt[4]{x-5}$

22. $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x-2}}$

23. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3-x}}$

24. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3+8}}$

25. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+4}{x-3}}$

26. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{2x-3}}$

27. $f(x) = \log(3x+6)$

28. $f(x) = \ln(5-2x)$

29. $f(x) = \log\left(\dfrac{1}{x}\right)$

30. $f(x) = \log(3+2x-x^2)$

Determina el rango de las siguientes funciones:

31. $f(x) = x^2 + 1$

32. $f(x) = x^2 - 4$

33. $f(x) = 9 - x^2$

34. $f(x) = 3x - x^2$

35. $f(x) = \dfrac{10x-1}{3-5x}$

36. $f(x) = \dfrac{2x-3}{4x+1}$

37. $y = \sqrt{x^2+1}$

38. $y = -\sqrt{2-x}$

39. $y = \sqrt{4-x^2}$

40. $y = \dfrac{1}{x^2+1}$

41. $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$

42. $y = |x-4|$

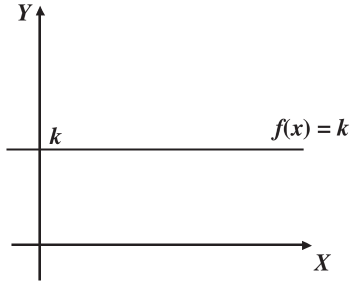
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Algunos tipos de funciones

Función constante

$f(x) = k$ con $k \in R$ representa una recta paralela al eje "X" sobre k.

Dominio: $D_f = R$ o bien $x \in (-\infty, \infty)$ Rango: $R_f = \{k\}$



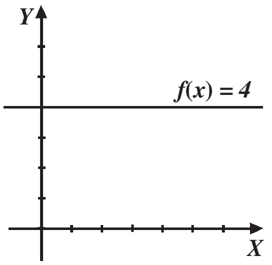
Ejemplo

Obtén la gráfica de $f(x) = 4$

Solución

Se traza una recta paralela al eje X sobre $y = 4$

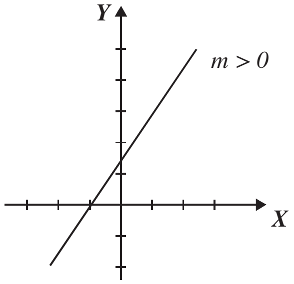
$$D_f = R \qquad R_f = \{4\}$$

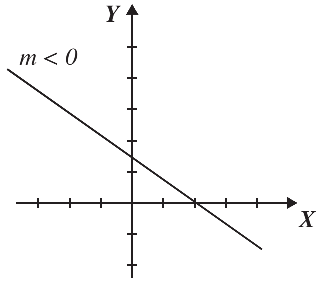


Función lineal

Esta función tiene la forma $f(x) = mx + b$ y representa una recta en el plano cartesiano, en donde m es la pendiente y b la ordenada al origen.

Dominio: $D_f = R$ o bien $x \in (-\infty, \infty)$, Rango: $R_f = R$ o bien $y \in (-\infty, \infty)$





Para graficar una función lineal se lleva a cabo lo siguiente:

I. Se localiza la ordenada al origen, es decir, el punto $(0, b)$.

II. A partir de este punto, se localiza otro, tomando la pendiente como el incremento o decremento vertical sobre el incremento horizontal.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Grafica la función $y = \frac{2}{3}x + 4$

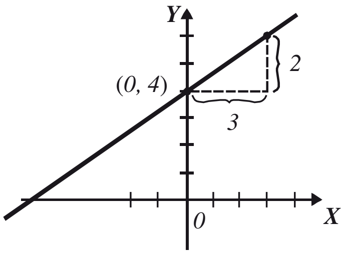
Solución

La pendiente y la ordenada al origen de la función:

$$y = \frac{2}{3}x + 4$$

$$m = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{2 \text{ incremento vertical}}{3 \text{ incremento horizontal}}, \quad b = 4, \text{ representa el punto } (0, 4)$$

Gráfica de la función



2 Traza la gráfica de la función $y = -\frac{4}{5}x + 2$

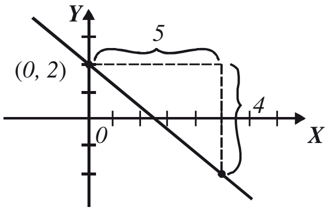
Solución

La pendiente y la ordenada al origen de la función:

$$y = -\frac{4}{5}x + 2$$

$$m = -\frac{4}{5} = \frac{-4}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{-4 \text{ decremento vertical}}{5 \text{ incremento horizontal}}, \quad b = 2, \text{ representa el punto } (0, 2)$$

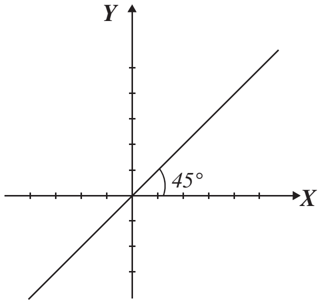
Gráfica de la función



Función identidad

Es la función lineal $f(x) = mx + b$, con $m = 1$ y $b = 0$, es decir: $f(x) = x$

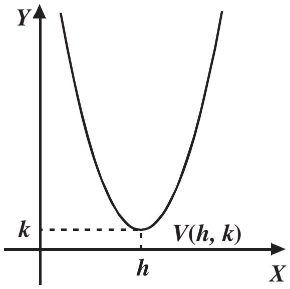
Dominio: $D_f = R$ o bien $x \in (-\infty, \infty)$ Rango: $R_f = R$ o bien $y \in (-\infty, \infty)$



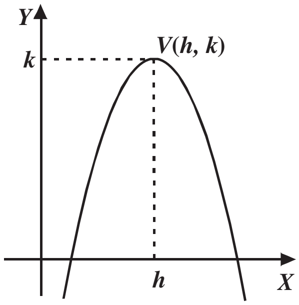
Función cuadrática

Es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ y representa una parábola cóncava hacia arriba o hacia abajo

Si $a > 0$



Si $a < 0$



$V(h, k)$: son las coordenadas del vértice.

Dominio: $D_f = R$ o bien $x \in (-\infty, \infty)$ Dominio: $D_f = R$ o bien $x \in (-\infty, \infty)$

Rango: $y \in \left[\frac{4ac-b^2}{4a}, \infty\right)$ Rango: $y \in \left(-\infty, \frac{4ac-b^2}{4a}\right]$

Para obtener las coordenadas (h, k) del vértice se aplican las siguientes fórmulas:

$$h = -\frac{b}{2a}, \; k = \frac{4ac-b^2}{4a}$$

Ejemplo

Obtén el dominio, rango y la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

Solución

Se identifican los valores de los coeficientes de cada término: $a = 1$, $b = -4$ y $c = 5$

$a > 0$, la parábola es cóncava hacia arriba

Se calculan los valores de h y k:

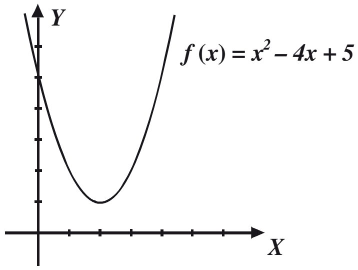
$$h = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = 2; \quad k = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4(1)(5)-(-4)^2}{4(1)} = 1$$

El vértice es el punto $V(2, 1)$ y el dominio y rango son:

$$D_f = R \text{ o bien } x \in (-\infty, \infty) \qquad y \in \left[\frac{4ac-b^2}{4a}, \infty\right) = [1, \infty)$$

Para graficar, se tabula y se asignan valores de x menores y mayores que 2

x	0	1	2	3	4
y	5	2	1	2	5



La función $f(x) = x^n$

Con "n" entero positivo tiene como: Dominio $x \in (-\infty, \infty)$ es decir el conjunto de los reales R y Rango:

$$\begin{cases} y \in [0, \infty) & \text{si } n \text{ es par} \\ y \in (-\infty, \infty) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

EJEMPLOS

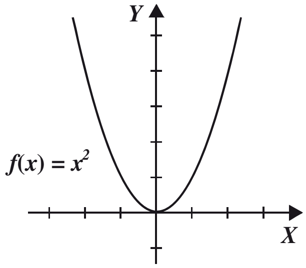
Ejemplos

1 Obtén la gráfica de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^4$

Solución

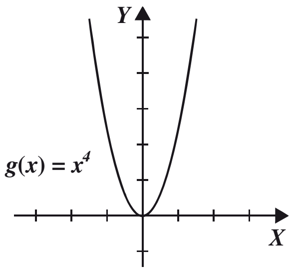
Se tabula con valores arbitrarios de x:

x	−2	−1	0	1	2
$f(x) = x^2$	4	1	0	1	4



Al graficar se obtiene:

x	$-\frac{3}{2}$	−1	0	1	$\frac{3}{2}$
$g(x) = x^4$	$\frac{81}{16}$	1	0	1	$\frac{81}{16}$

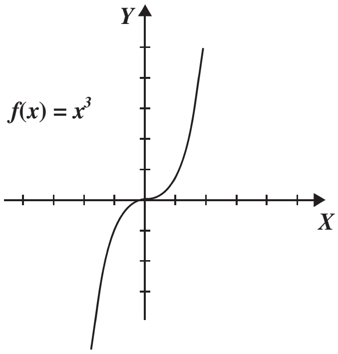


2 Obtén la gráfica de las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^5$

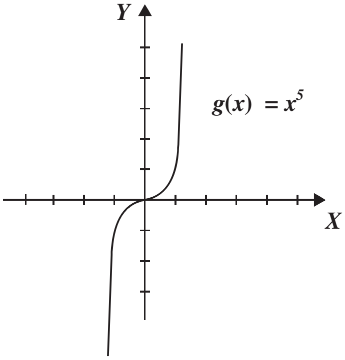
Solución

Se tabula para valores arbitrarios de x:

x	−2	−1	0	1	2
$f(x) = x^3$	−8	−1	0	1	8



x	$-\frac{3}{2}$	−1	0	1	$\frac{3}{2}$
$g(x) = x^5$	$-\frac{243}{32}$	−1	0	1	$\frac{243}{32}$



Función racional

Se expresa como el cociente de dos funciones polinomiales.

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \text{ con } Q(x) \neq 0$$

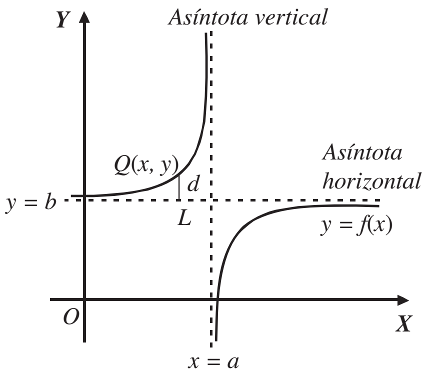
Definición de asíntota

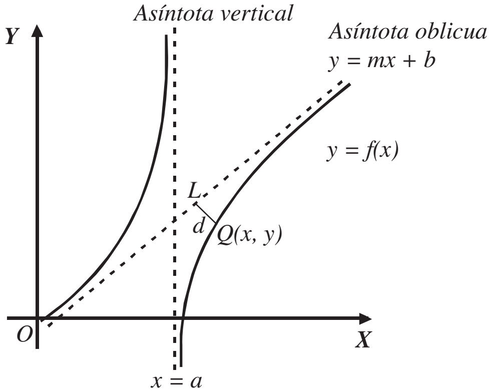
Si la distancia d entre una recta o curva L y el punto móvil $Q(x, y)$ de la función tiende a cero, entonces la recta o curva recibe el nombre de asíntota.

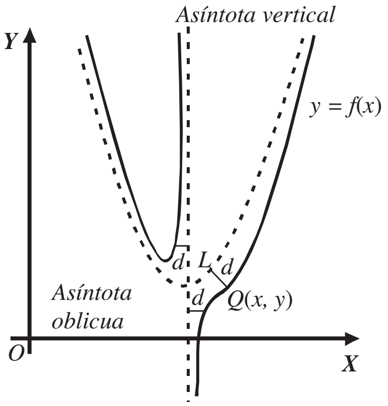
Existen tres tipos de asíntotas: verticales, horizontales y oblicuas.

Cuando la gráfica de la función $f(x)$ se acerca a la curva o recta $L(x)$ y la distancia d entre un punto de $f(x)$ y la curva o recta $L(x)$ tiende a cero (es decir la gráfica no toca a $L(x)$), entonces $L(x)$ recibe el nombre de asíntota.

Ejemplos







En este capítulo sólo se estudiarán las asíntotas horizontales y verticales.

- **Asíntotas verticales**

  Una función de la forma $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, tiene asíntotas verticales si existen valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ tal que se cumple lo siguiente:

$$Q(x_1) = Q(x_2) = \ldots = Q(x_n) = 0$$

- **Asíntotas horizontales**

  Se despeja la variable independiente x, si se obtiene una función de la forma $G(y) = \dfrac{R(y)}{S(y)}$, tal que para los valores de $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ se cumpla que:

$$S(y_1) = S(y_2) = \ldots = S(y_n) = 0$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Solución

El dominio de la función está dado por el conjunto $D_f = \{x \in R \mid x \neq 0\}$, teniendo una asíntota en $x = 0$, es decir el eje vertical del plano.

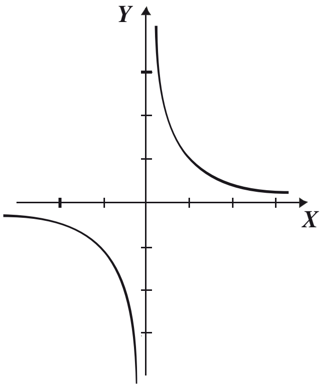
Al despejar x se obtiene $x = \dfrac{1}{y}$

De la cual se deduce que el rango está dado por $R_f = \{y \in R \mid y \neq 0\}$ y su asíntota horizontal es $y = 0$, es decir el eje horizontal del plano.

Si tabulas para valores de x diferentes de cero obtienes:

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3	no existe	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Se grafican las asíntotas y se localizan los puntos en el plano, se unen y se observa cómo la curva se acerca a las asíntotas sin tocarlas, haciendo la distancia entre la curva y las rectas cada vez más pequeña.



2 Determina el dominio, el rango y la gráfica de la función $y = \dfrac{2x-3}{x+2}$

Solución

El denominador debe ser diferente de cero,

$$x + 2 \neq 0, \text{ entonces } x \neq -2$$

Por tanto, el dominio está dado por:

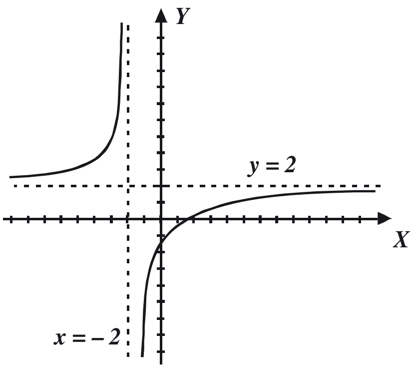
$$D_f = \{x \in R \mid x \neq -2\} \text{ o } x \in (-\infty, -2) \cup (-2, \infty) \text{ y la asíntota vertical es } x = -2$$

Al despejar x se obtiene el rango y la asíntota horizontal:

$$y = \frac{2x-3}{x+2}, \text{ entonces } x = \frac{2y+3}{2-y} \text{ donde } 2 - y \neq 0 \rightarrow y \neq 2$$

Por tanto, el $R_f = \{y \in R \mid y \neq 2\}$ y la asíntota horizontal es $y = 2$

Gráfica: Se trazan las asíntotas y mediante una tabulación se obtienen los pares ordenados, los cuales forman la siguiente curva:



Función raíz cuadrada

La función está dada por: $f(x) = \sqrt{g(x)}$, con $g(x) \geq 0$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x+2}$

Solución

Para determinar el dominio se resuelve la desigualdad: $x + 2 \geq 0$ donde $x \geq -2$, entonces el dominio es el conjunto: $\{x \in R \mid x \geq -2\}$ o $x \in [-2, \infty)$

El rango se obtiene despejando x

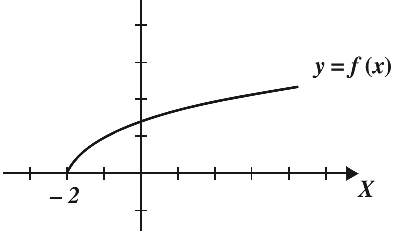
$$y = \sqrt{x+2} \quad \rightarrow \quad y^2 = x + 2 \quad \rightarrow \quad x = y^2 - 2$$

La función es una raíz positiva, o cero, es decir $y \in [0, \infty)$ y el despeje da como resultado una expresión polinomial donde $y \in R$, por tanto el rango está definido para $y \in [0, \infty)$

Al tabular dando algunos valores en el intervalo $x \in [-2, \infty)$ se obtiene:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$

La gráfica que se obtiene es:



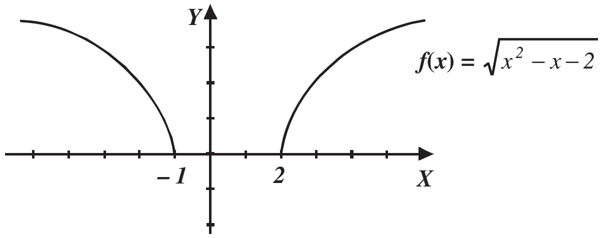
2 Determina la gráfica de la función: $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$

Solución

Para obtener el dominio se resuelve la desigualdad $x^2 - x - 2 \geq 0$, obteniendo que

$$x \in (-\infty, -1] \cup [2, \infty)$$

Al despejar x se obtiene, $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{4y^2 + 9}}{2}$ donde $y \in (-\infty, \infty)$, $f(x)$ es una raíz positiva, o cero, por tanto el rango es: $y \in (-\infty, \infty) \cap [0, \infty) = [0, \infty)$



3 Grafica la función $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

Solución

Para obtener el dominio se resuelve la desigualdad $\dfrac{x-1}{x+1} \geq 0$, obteniendo que:

$$x \in (-\infty, -1) \cup [1, \infty)$$

Al despejar x para obtener el rango:

$$y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \rightarrow y^2 = \frac{x-1}{x+1} \rightarrow y^2(x+1) = x - 1 \rightarrow y^2x + y^2 = x - 1$$

$$y^2x - x = -1 - y^2$$

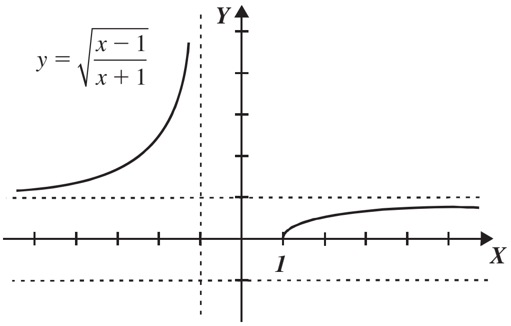
$$x(y^2 - 1) = -1 - y^2$$

$$x = \frac{-1 - y^2}{y^2 - 1}, \text{ donde } y \neq \pm 1.$$

La función es una raíz positiva, por tanto, $y \in [0, \infty)$, entonces el rango corresponde a:

$$y \in [0, 1) \cup (1, \infty)$$

La función tiene una asíntota vertical en $x = -1$ y dos horizontales en $y = -1$, $y = 1$, al graficar se obtiene:



Nota: Observe que gráficamente $y = -1$ no es asíntota.

Función valor absoluto

La función es $f(x) = |g(x)|$, donde $x \in D_g$ y $f(x) \geq 0$.

EJEMPLOS

Ejemplos

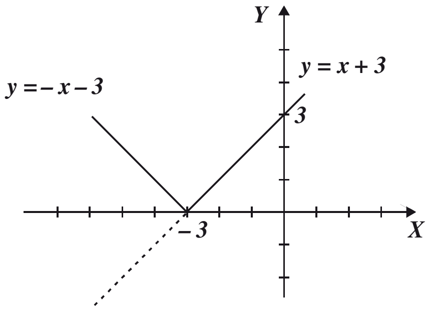
1 Obtén la gráfica de $f(x) = |x + 3|$.

Solución

Se parte de la definición de valor absoluto, en la que $|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$, se obtienen las siguientes igualdades:

$y = x + 3$, $y = -x - 3$, las cuales son dos rectas donde el dominio son los números reales y el rango está dado por $y \in [0, \infty)$

La gráfica que se obtiene es:



2 Obtén la gráfica de $f(x) = \left|\frac{2}{x}\right|$.

Solución

$\frac{2}{x}$, está definido para $x \neq 0$, por tanto el dominio es el conjunto $D_f = \{x \in R \mid x \neq 0\}$ o bien

$$x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

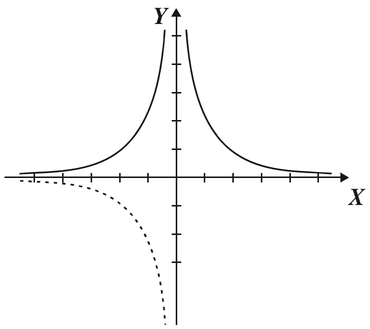
Para el rango se despeja x de las igualdades que se obtienen al aplicar la definición de valor absoluto.

$$y = \frac{2}{x} \rightarrow x = \frac{2}{y}, \text{ donde } y \neq 0, \qquad y = -\frac{2}{x} \rightarrow x = -\frac{2}{y}, \text{ donde } y \neq 0$$

También se toma el hecho de que $f(x) > 0$, ya que $\left|\frac{2}{x}\right| > 0$, por tanto el rango es el conjunto $R_f = \{y \in R \mid y > 0\}$ o bien $y \in (0, \infty)$.

La asíntota horizontal es $y = 0$, mientras que la vertical es la recta $x = 0$.

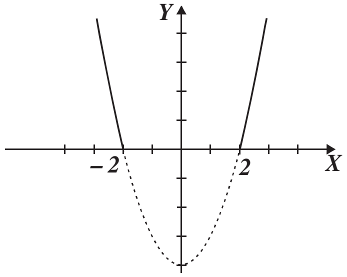
Luego la gráfica que se obtiene es:



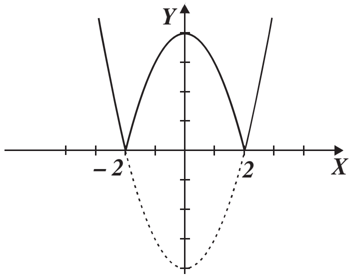
3 Obtén la gráfica de $f(x) = |x^2 - 4|$.

Solución

$y = x^2 - 4$ es una función cuadrática con dominio $x \in R$ y rango $y \in [-4, \infty)$, teniendo como gráfica:



$f(x) \geq 0$, luego el rango de la función es: $y \in [0, \infty)$, por tanto, al hacer positiva la parte donde $x^2 - 4$ es negativa se obtiene la siguiente gráfica:



4 Obtén el dominio, el rango y la gráfica de $f(x) = \left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|$

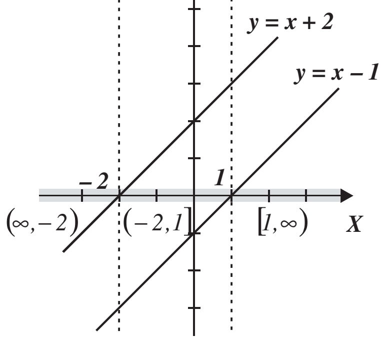
Solución

Dominio: Para $y = \dfrac{x-1}{x+2}$, $x \neq -2$, por tanto el dominio de la función está dado por:

$$x \in (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$$

Rango: $f(x) > 0$, por tanto, el rango está dado por $y \in [0, \infty]$, pero al despejar "x" se obtiene $x = \dfrac{1-2y}{y-1}$, entonces $y \neq 1$, por tanto $y \in [0, 1) \cup (1, \infty)$

Gráfica 1

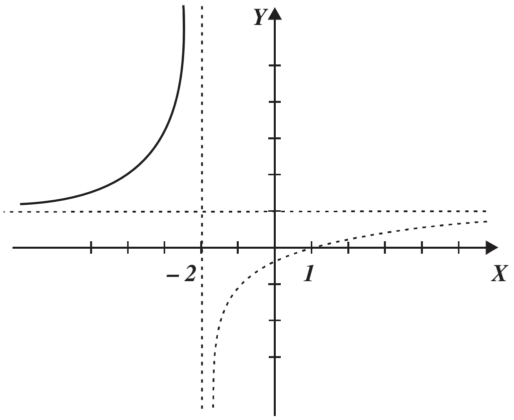


En la gráfica 1 se muestran los intervalos que se analizarán para construir la gráfica que se propone.

i) En el intervalo $(-\infty, -2)$ las rectas $y = x - 1$, $y = x + 2$, toman valores negativos, es decir

$$f(x) = \left|\frac{x-1}{x+2}\right| = \frac{-(x-1)}{-(x+2)} = \frac{x-1}{x+2}$$

La porción de gráfica en el intervalo $(-\infty, -2)$ es:



ii) En el intervalo $(-2, 1]$

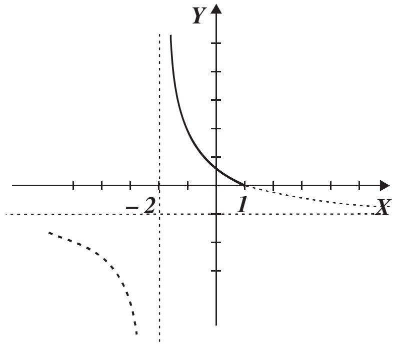
$y = x - 1$ toma valores negativos

$y = x + 2$ los toma positivos

es decir:

$$f(x) = \left|\frac{x-1}{x+2}\right| = \frac{-(x-1)}{+(x+2)} = \frac{1-x}{x+2}$$

La porción de gráfica es:



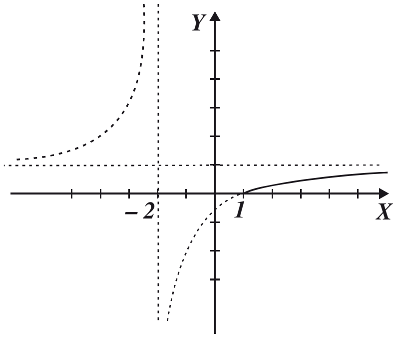
iii) En el intervalo $[-1, \infty)$

$$y = x - 1, y = x + 2$$

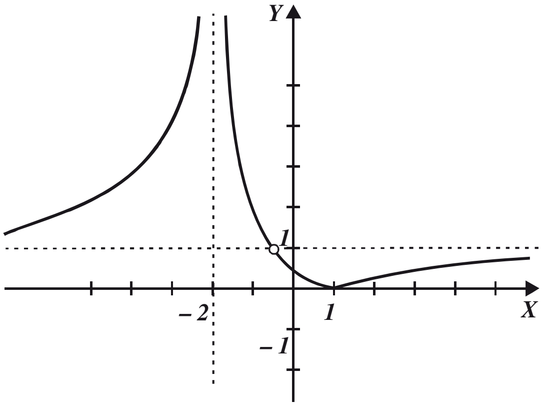
toma valores positivos es decir

$$f(x) = \left|\frac{x-1}{x+2}\right| = \frac{+(x-1)}{+(x+2)} = \frac{x-1}{x+2}$$

Tiene la misma gráfica que en el caso i)
La porción de gráfica es:



Finalmente, la gráfica es la unión de las porciones de gráfica en cada intervalo.



Nota: En la gráfica aparece un hueco en $y = 1$ ya que el rango es $y \in [0, 1) \cup (1, \infty)$

Función mayor entero

Tiene la forma: $f(x) = [x]$ con la propiedad de que $[x] = n$ para todo $n \leq x < n + 1$, con $n \in Z$.

EJEMPLOS

1 Obtén la gráfica de: $f(x) = [x]$

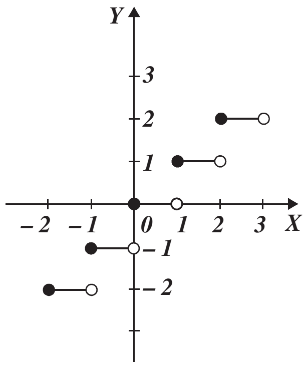
Dominio: $D_f = \{x \mid x \in R\}$

Rango: $R_f = \{y \mid y \in Z\}$

Se toma un subconjunto del dominio por ejemplo $x \in [-2, 3]$ se tiene que:

$$f(x) = [x] = \begin{cases} -2 & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ -1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 3 & \text{si } 3 \leq x < 4 \end{cases}$$

Gráfica:



También recibe el nombre de función escalón.

2 Traza la gráfica de $f(x) = \left[\frac{2}{3}x\right]$

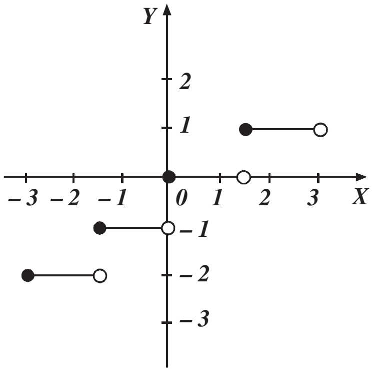
Solución

El dominio y el rango de la función se definen:

$$D_f = \{x \mid x \in R\} \text{ y } R_f = \{y \mid y \in Z\}$$

Se elige el subconjunto del dominio $x \in [-2, 2]$ entonces:

	Longitud del escalón	f(x)
$-2 \leq \frac{2}{3}x < -1$	$-3 \leq x < -\frac{3}{2}$	-2
$-1 \leq \frac{2}{3}x < 0$	$-\frac{3}{2} \leq x < 0$	-1
$0 \leq \frac{2}{3}x < 1$	$0 \leq x < \frac{3}{2}$	0
$1 \leq \frac{2}{3}x < 2$	$\frac{3}{2} \leq x < 3$	1



EJERCICIO 4

Obtén la gráfica de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 4$
2. $f(x) = -\frac{2}{5}$
3. $f(x) = \pi$
4. $f(x) = 3x + 5$
5. $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$
6. $f(x) = -\frac{3}{4}x + 2$
7. $f(x) = x^2 - 4x + 3$
8. $f(x) = -2x^2 + 12x - 13$
9. $f(x) = 4 - x^2$
10. $y = \frac{3}{x}$
11. $f(x) = -\frac{1}{x}$
12. $f(x) = \frac{x}{x-2}$
13. $y = \frac{x-2}{x+4}$
14. $f(x) = \frac{x+2}{3-x}$
15. $f(x) = \frac{x^2+5x+6}{x^2-4}$
16. $f(x) = \frac{1}{x^2+2x-3}$
17. $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2-9}$
18. $f(x) = \sqrt{-x}$
19. $y = \sqrt{x-4}$
20. $y = -\sqrt{9-x}$
21. $y = \sqrt{x^2-36}$
22. $y = \sqrt{16-x^2}$
23. $f(x) = \sqrt{x^2+x-12}$
24. $f(x) = \sqrt{4x^2-9}$
25. $f(x) = \sqrt{\frac{900-100x^2}{9}}$
26. $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$
27. $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x+2}}$
28. $f(x) = \sqrt{\frac{x+4}{x-3}}$
29. $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x+2}}$
30. $f(x) = |x|$
31. $f(x) = |x - 2|$
32. $f(x) = |x + 4|$
33. $f(x) = |x^2 - 1|$
34. $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$
35. $f(x) = |2 - x^2|$
36. $f(x) = \left|\frac{1}{x-2}\right|$
37. $f(x) = \left|\frac{2}{3-x}\right|$
38. $f(x) = \left|\frac{x+3}{x-3}\right|$
39. $f(x) = \left|\frac{x-3}{x+1}\right|$
40. $f(x) = \left[\frac{1}{2}x\right]$
41. $f(x) = \left[\frac{5}{3}x\right]$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Función característica

Son funciones que están seccionadas por intervalos y en cada intervalo se presenta una función distinta. Para graficarla basta con dibujar la gráfica de cada una de las funciones en el intervalo dado.

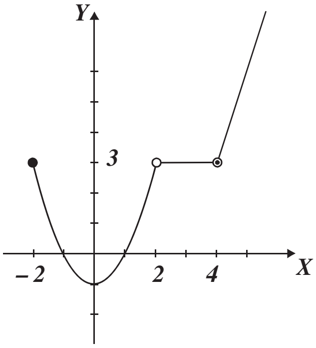
Ejemplo

Obtén la gráfica de:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ 3 & \text{si } 2 < x < 4 \\ 3x - 9 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Solución

Se tabula cada una de las funciones en el intervalo dado, se localizan los puntos y se grafican, observa que hay puntos que no están incluidos, para esos valores se coloca un círculo abierto.



EJERCICIO 5

Obtén la gráfica de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ -x + 4 & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 3 \\ 0 & \text{si } x < -3 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < -1 \\ 3 & \text{si } -1 < x < 2 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2 - x} & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{x - 2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x < -2 \\ x^2 + 1 & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

7. $f(x) = \dfrac{|x - 4|}{x - 4}$ Recuerda que $|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

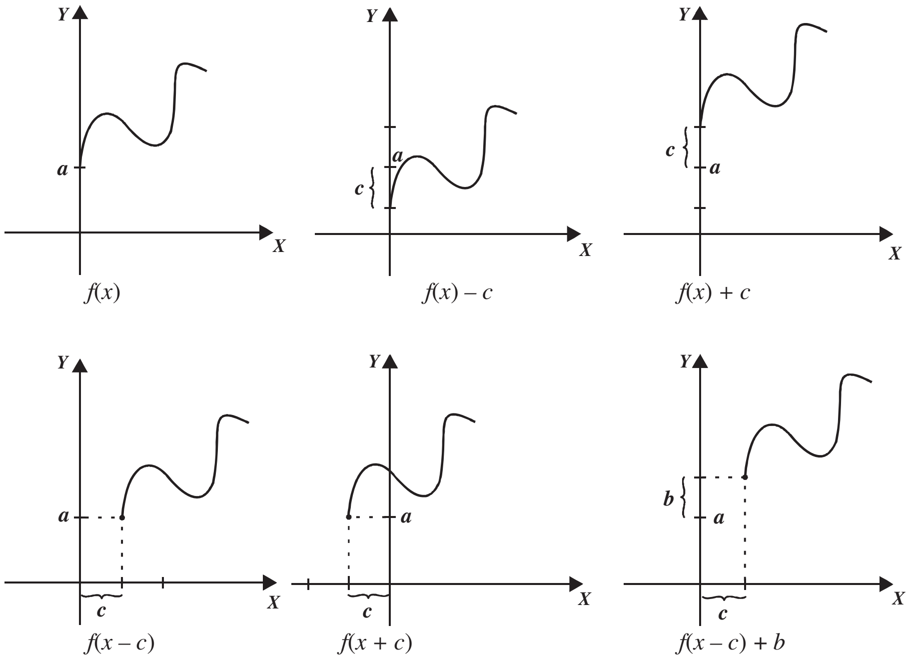
Gráfica de una función a partir de otra conocida

Algunas funciones se grafican a partir de que se conoce la gráfica de otra, a través de desplazamientos, alargamientos o reflexiones de esta última.

Desplazamientos

Sea $f(x)$ una función, $c > 0$ y $b > 0$, si:

a) $y = f(x) + c$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, c unidades hacia arriba.
b) $y = f(x) - c$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, c unidades hacia abajo.
c) $y = f(x + c)$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, c unidades hacia la izquierda.
d) $y = f(x - c)$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, c unidades a la derecha.
e) $y = f(x + c) + b$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, c unidades hacia la izquierda y b unidades hacia arriba.
f) $y = f(x + c) - b$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, c unidades hacia la izquierda y b unidades hacia abajo.
g) $y = f(x - c) + b$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, c unidades hacia la derecha y b unidades hacia arriba.
h) $y = f(x - c) - b$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, c unidades hacia la derecha y b unidades hacia abajo.



Alargamientos

Sea $f(x)$ una función, $c > 1$, si:

a) $y = cf(x)$, se alarga verticalmente la gráfica de $f(x)$, c veces.

b) $y = \frac{1}{c}f(x)$, se comprime verticalmente la gráfica de $f(x)$, en $\frac{1}{c}$

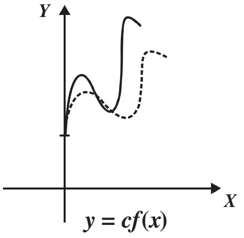
c) $y = f(cx)$, se comprime horizontalmente la gráfica de $f(x)$, c veces.

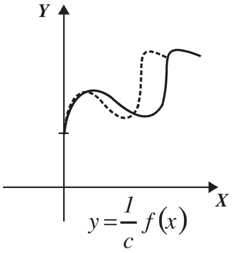
d) $y = f\left(\frac{1}{c}x\right)$, se alarga horizontalmente la gráfica de $f(x)$, en $\frac{1}{c}$

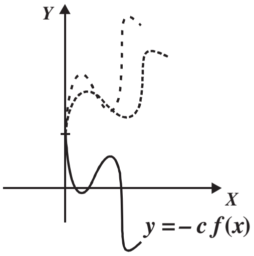
Reflexiones verticales y horizontales

Sea $f(x)$ una función si:

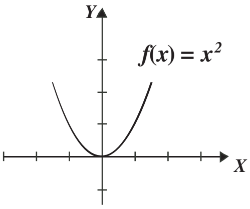
1. $y = -f(x)$, se refleja la gráfica de $f(x)$ con respecto al eje X.
2. $y = f(-x)$, se refleja la gráfica de $f(x)$ con respecto al eje Y.

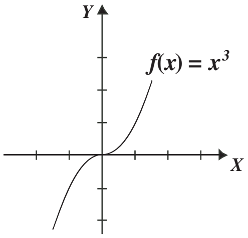


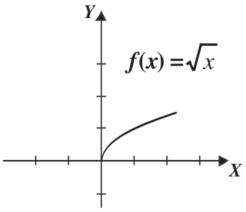


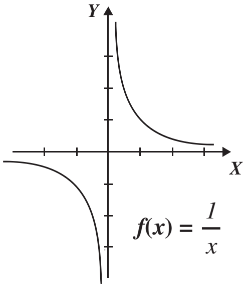


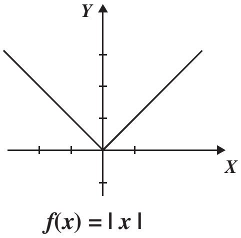
Se tomarán como base las siguientes funciones para graficar otras de la misma forma:











EJEMPLOS

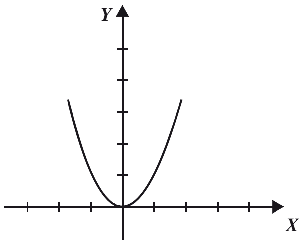
Ejemplos

1 Con base en la función $f(x) = x^2$, obtén la gráfica de: $y = x^2 + 2$, $y = x^2 - 2$,

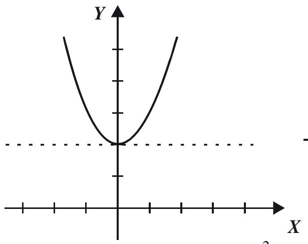
$$y = (x - 2)^2,\ y = (x + 2)^2,\ y = 2x^2,\ y = \frac{1}{2}x^2,\ y = -x^2,\ y = x^2 - 2x - 3$$

Solución

$f(x) = x^2$

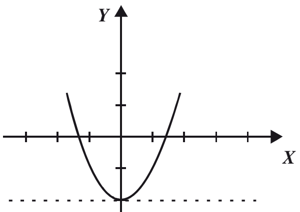


$y = x^2 + 2$



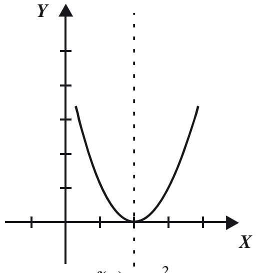
Se desplaza la gráfica $f(x) = x^2$ dos unidades hacia arriba

$y = x^2 - 2$



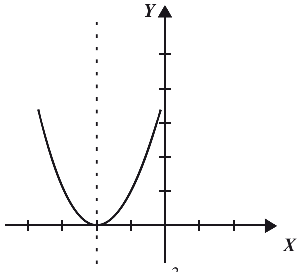
Se desplaza la gráfica $f(x) = x^2$ dos unidades hacia abajo

$y = (x - 2)^2$



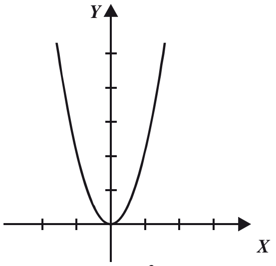
Se desplaza $f(x) = x^2$ dos unidades hacia la derecha

$y = (x + 2)^2$



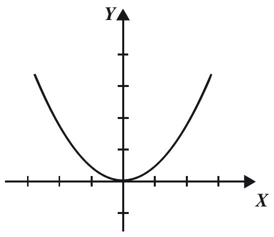
Se desplaza $f(x) = x^2$ dos unidades hacia la izquierda

$y = 2x^2$



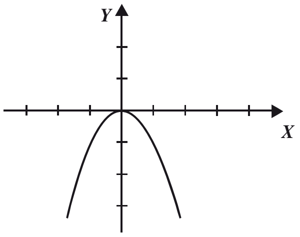
Se alarga $f(x) = x^2$ verticalmente dos veces

$y = \frac{1}{2}x^2$



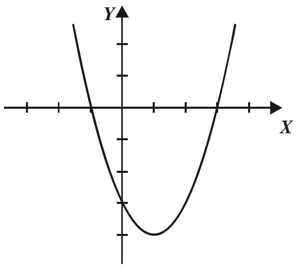
Se comprime $f(x) = x^2$ a la mitad verticalmente

$y = -x^2$



Se refleja $f(x) = x^2$ con respecto al eje X

$y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4$

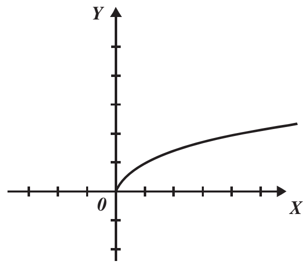


Se desplaza $f(x) = x^2$ hacia la derecha una unidad y baja cuatro unidades

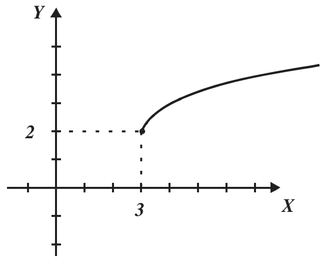
2 Determina la gráfica de $y = \sqrt{x-3} + 2$, a partir de la gráfica de $y = \sqrt{x}$.

Solución

La gráfica de $y = \sqrt{x}$ es:



Para obtener la gráfica de $y = \sqrt{x-3} + 2$, se toma la gráfica de $y = \sqrt{x}$, ésta se desplaza 3 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba



EJERCICIO 6

Utiliza desplazamientos, alargamientos o reflexiones para obtener la gráfica de las siguientes funciones:

1. $y = x^2 - 4$
2. $y = (x + 3)^2$
3. $y = 1 - x^2$
4. $y = x^2 - 6x + 10$
5. $y = 3x^2 + 12x + 11$
6. $y = -x^3$
7. $y = x^3 + 1$
8. $y = (x - 1)^3 + 2$
9. $y = \frac{1}{2}x^3 - 2$
10. $y = \sqrt{x-2} + 2$
11. $y = \sqrt{x-3} - 2$
12. $y = -\sqrt{x+3}$
13. $y = |x - 3| - 2$
14. $y = 3 - |x + 4|$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Funciones creciente y decreciente

Una función es **creciente** en un intervalo I, si para cualquier $x_1, x_2 \in$ I,

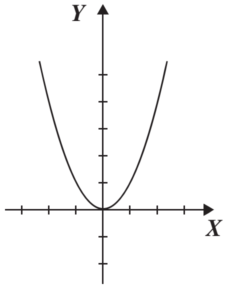
$$f(x_1) < f(x_2) \text{ donde } x_1 < x_2$$

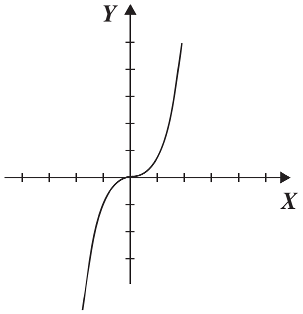
Una función es **decreciente** en un intervalo I, si para cualquier $x_1, x_2 \in$ I,

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ donde } x_1 < x_2$$

Ejemplos

Las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$ son:





La función $f(x) = x^2$, es decreciente en el intervalo de $(-\infty, 0)$ y creciente en el intervalo $(0, \infty)$, mientras que $g(x) = x^3$ es creciente para toda x de su dominio.

EJERCICIO 7

Con las funciones conocidas determina el intervalo donde crecen o decrecen:

1. $f(x) = \sqrt{x}$
2. $f(x) = x^4$
3. $f(x) = x$
4. $f(x) = |x|$
5. $f(x) = \sqrt{x-2}$
6. $f(x) = -\sqrt{x+3}$
7. $f(x) = 9 - x^2$
8. $f(x) = |x - 3| - 2$
9. $f(x) = \sqrt{9-x^2}$
10. $f(x) = 6$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Funciones inyectiva, suprayectiva y biyectiva

Función inyectiva (uno a uno)

Si $x_1, x_2 \in D_f$ y $x_1 \neq x_2$, f es una función inyectiva si y solo si $f(x_1) \neq f(x_2)$, o dicho de otra forma, $f(x_1) \neq f(x_2)$ si y solo si $x_1 \neq x_2$.

Se determina si la *función es inyectiva* al trazar una recta paralela al eje X sobre la gráfica y si toca un solo punto es inyectiva. También se puede decir que una función inyectiva es aquella que siempre es creciente o siempre decreciente.

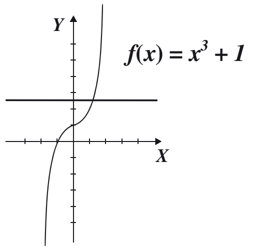
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina si la función $f(x) = x^3 + 1$, es inyectiva.

Solución

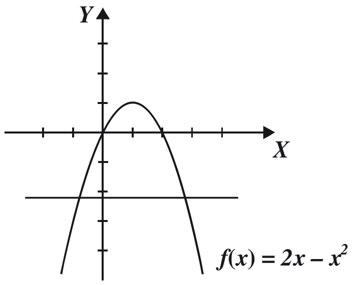
Sean $x_1 \neq x_2$, se tiene que $(x_1)^3 + 1 \neq (x_2)^3 + 1$, ya que no hay números distintos cuyos cubos sean iguales, con este resultado podemos afirmar que la función es inyectiva; por otro lado, si se observa que la gráfica es creciente, por tanto, es inyectiva. Otra forma de saber si la función es inyectiva es trazar cualquier recta paralela al eje X, y ésta debe tocar un solo punto de la gráfica.



2 Determina si la función $f(x) = 2x - x^2$ es inyectiva.

Solución

No es inyectiva, ya que para $x_1 = -1$ y $x_2 = 3$ se obtiene que $f(x_1) = f(x_2) = -3$, lo que contradice la definición. Luego, si se traza una recta paralela al eje X, se observa que ésta toca dos puntos de la gráfica; por otro lado, no es una función que sea creciente ni decreciente siempre.



Función suprayectiva

Una función f: $A \rightarrow B$ es suprayectiva o sobreyectiva si para cada $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$; es decir, para todo elemento de B siempre hay uno de A al cual fue asignado.

Otra forma de reconocer una función suprayectiva es si su contradominio es igual a su rango. Al menos que se indique lo contrario el contradominio de las funciones dadas serán los números reales.

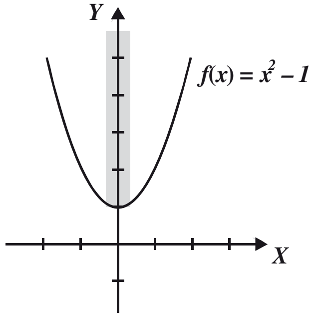
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina si la función $f(x) = x^2 + 1$ es suprayectiva.

Solución

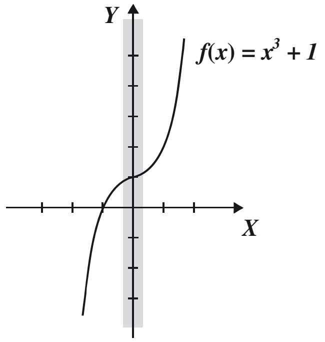
El contradominio de la función es el intervalo $(-\infty, \infty)$ y su rango el intervalo $[1, \infty)$, por tanto, la función no es suprayectiva.



2 Determina si la función $f(x) = x^3 + 1$ es suprayectiva

Solución

El contradominio de la función es el intervalo $(-\infty, \infty)$ y su rango el intervalo $(-\infty, \infty)$, por tanto, la función es suprayectiva.



Función biyectiva

Una función "f" es *biyectiva* si es *inyectiva* y *suprayectiva*.

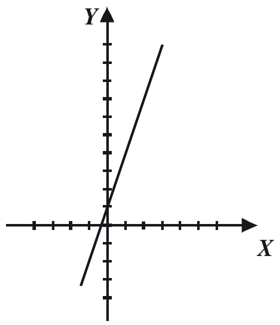
EJEMPLOS

1 Determina si la función $f(x) = 3x + 1$ es biyectiva.

Solución

Es una función siempre creciente, por tanto, es inyectiva. El contradominio de la función es $(-\infty, \infty)$ y su rango $(-\infty, \infty)$ entonces es suprayectiva.

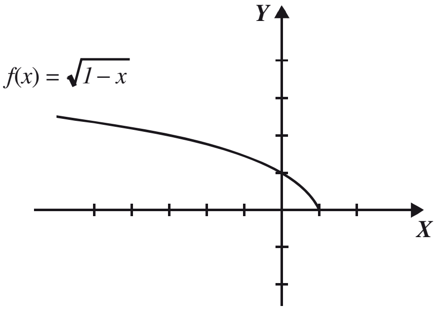
La función es inyectiva y suprayectiva, por tanto, es biyectiva.



2 Determina si la función $f(x) = \sqrt{1-x}$ es biyectiva.

Solución

Gráfica



Si al trazar una recta paralela al eje X interseca a la curva en un punto es inyectiva; no es suprayectiva, ya que su contradominio son los reales y su rango es el intervalo $[0, \infty)$. Es inyectiva pero no suprayectiva, entonces no es biyectiva.

3 Determina si la función $f: (-\infty, 1] \rightarrow [0, \infty)$, tal que $f(x) = \sqrt{1-x}$ es biyectiva.

Solución

La gráfica es la misma de la función del ejemplo anterior, por tanto, la función es inyectiva.

En este caso se especifica el contradominio como el intervalo $[0, \infty)$ el cual es igual al rango, entonces, es suprayectiva.

Es inyectiva y suprayectiva, por consiguiente, es biyectiva.

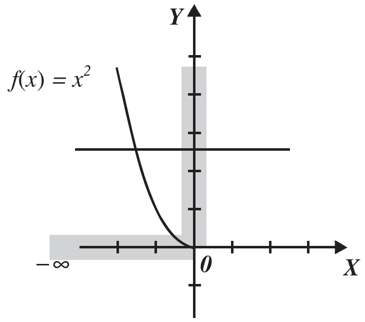
4 Determina si la función $f: (-\infty, 0] \rightarrow [0, \infty)$, tal que $f(x) = x^2$ es biyectiva.

Solución

De la gráfica se observa que la función es inyectiva, ya que la recta horizontal sólo toca un punto.

Por otro lado, el contradominio es el intervalo $[0, \infty)$ el cual es igual al rango, por tanto, es suprayectiva.

Por último, es inyectiva y suprayectiva, por consiguiente, es biyectiva.



EJERCICIO 8

Indica cuál de las siguientes funciones es inyectiva, sobreyectiva y biyectiva

1. $f(x) = x$
2. $f(x) = 3$
3. $f(x) = x^2$
4. $f(x) = x^3$
5. $f(x) = x^2, x \in [0, \infty)$
6. $f(x) = x^2 - 7x + 10$
7. $f(x) = 2x - 3$
8. $f(x) = \sqrt{x-3}$
9. $f: R \rightarrow [-1, \infty)$, tal que $f(x) = x^2 - 1$
10. $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, tal que $f(x) = |x|$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Operaciones con funciones

Sean f y g dos funciones con dominios D_f y D_g respectivamente

- $f(x) + g(x) = (f + g)(x)$, con dominio: $D_f \cap D_g$
- $f(x) - g(x) = (f - g)(x)$, con dominio: $D_f \cap D_g$
- $f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$, con dominio: $D_f \cap D_g$
- $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$, con dominio: $\{x \in D_f \cap D_g \mid g(x) \neq 0\}$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Sean las funciones $f(x) = x^2 - 7x + 10$, y $g(x) = x - 5$

Determina

a) $f(x) + g(x)$
b) $f(x) - g(x)$
c) $f(x) \cdot g(x)$
d) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Solución

Se obtienen los dominios de f y g para efectuar las operaciones.

$$D_f: (-\infty, \infty), D_g: (-\infty, \infty)$$

a) $f(x) + g(x) = (x^2 - 7x + 10) + (x - 5)$
$= x^2 - 6x + 5$, con $D_f \cap D_g = (-\infty, \infty)$
b) $f(x) - g(x) = (x^2 - 7x + 10) - (x - 5)$
$= x^2 - 8x + 15$, con $D_f \cap D_g = (-\infty, \infty)$
c) $f(x) \cdot g(x) = (x^2 - 7x + 10)(x - 5)$
$= x^3 - 7x^2 + 10x - 5x^2 + 35x - 50$
$= x^3 - 12x^2 + 45x - 50$, con $D_f \cap D_g = (-\infty, \infty)$
d) $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x - 5} = \dfrac{(x-5)(x-2)}{x-5} = x - 2$ con, $\{x \in D_f \cap D_g \mid x \neq 5\}$

2 Sean las funciones $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ y $g(x) = x$ determina: $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ y $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Solución

Se obtienen los dominios de las funciones: D_f: $[-3, 3]$, D_g: $(-\infty, \infty)$ y se realizan las operaciones.

$f(x) + g(x) = \sqrt{9 - x^2} + x$, con dominio: $D_f \cap D_g = [-3, 3] \cap (-\infty, \infty) = [-3, 3]$

$f(x) - g(x) = \sqrt{9 - x^2} - x$, con dominio: $D_f \cap D_g = [-3, 3] \cap (-\infty, \infty) = [-3, 3]$

$f(x) \cdot g(x) = \sqrt{9 - x^2} \cdot x = x\sqrt{9 - x^2}$, con dominio: $D_f \cap D_g = [-3, 3] \cap (-\infty, \infty) = [-3, 3]$

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{x}$, con dominio: $\{x \in [-3, 3] \mid x \neq 0\}$ o bien $x \in [-3, 0) \cap (0, 3]$

3 Sean $f = \{(2, 3), (3, -1), (4, -5), (5, -9)\}$ y $g = \{(1, 2), (2, 5), (3, 8), (7, 10)\}$, determina $f + g$

Solución

Los dominios son $D_f = \{2, 3, 4, 5\}$ y $D_g = \{1, 2, 3, 7\}$, entonces $D_{f+g} = \{2, 3\}$, para calcular $f(x) + g(x)$ se sustituyen los valores del dominio de la suma.

$$f(2) + g(2) = 3 + 5 = 8$$
$$f(3) + g(3) = -1 + 8 = 7$$

Por tanto, $f(x) + g(x) = \{(2, 8), (3, 7)\}$

EJERCICIO 9

Para las siguientes funciones determina:

$$f(x) + g(x),\ f(x) - g(x),\ f(x) \cdot g(x) \text{ y } \frac{f(x)}{g(x)}$$

1. $f(x) = 5,\ g(x) = -2$
2. $f(x) = 2x - 5,\ g(x) = 2x + 5$
3. $f(x) = x^2 - 4x - 5,\ g(x) = x^2 + 3x + 2$
4. $f(x) = \frac{2x-1}{2},\ g(x) = \frac{x+2}{3}$
5. $f(x) = \sqrt{x-3},\ g(x) = \sqrt{x+4}$
6. $f(x) = x + \sqrt{x},\ g(x) = \sqrt{x}$
7. $f(x) = \text{sen}^2 x,\ g(x) = \cos^2 x$
8. $f = \{(-1, 2), (0, 3), (1, 4), (3, 6), (5, 7)\},\ g = \{(-3, 6), (-2, 8), (-1, 10), (2, 12), (3, 14), (5, 16), (6, 18)\}$
9. $f = \{(-2, -5), (-1, -3), (0, -1), (1, 1), (2, 3)\},\ g = \{(-5, 8), (-4, 7), (-3, 6), (-2, 5), (-1, 4), (0, 3)\}$
10. $f = \left\{\left(-2, -\frac{1}{2}\right), (-1, -1), (1, 1), \left(2, \frac{1}{2}\right), \left(3, \frac{1}{3}\right)\right\},\ g = \left\{(-1, 2), (1, 0), \left(2, \frac{1}{2}\right)\right\}$

Dadas las funciones:

$$f(x) = x + 3,\ g(x) = x^2 + 5x + 6,\ r(x) = x + 2,\ s(x) = x^2 - 3x - 10$$

Determina:

11. $f(x) + r(x)$
12. $f(x) - s(x)$
13. $g(x) \cdot s(x)$
14. $\frac{g(x)}{r(x)}$
15. $\frac{s(x)}{r(x)}$
16. $g(x) - s(x)$
17. $f(x) \cdot r(x)$
18. $\frac{f(x)}{r(x)}$
19. $\frac{g(x)}{s(x)}$
20. $\frac{g(x)}{f(x)} + \frac{s(x)}{r(x)}$

Dadas las funciones:

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2},\ g(x) = \frac{1}{x} \text{ y } h(x) = \frac{1-x}{3-x}, \text{ determina:}$$

21. $f(x) + g(x)$
22. $\frac{f(x)}{g(x)}$
23. $f(x) \cdot g(x)$
24. $f(x) - h(x)$
25. $g(x) \cdot h(x)$
26. $\frac{f(x)}{g(x)} + h(x)$

27. $\dfrac{h(x)}{f(x)} - g(x)$

28. $\dfrac{h(2)-f(1)}{g(3)}$

29. $f(x+1)\cdot\dfrac{1}{h(x+1)}$

30. $h(x) - g(x)$

31. $\dfrac{h(x)}{g(x)} - \dfrac{g(x)}{f(x)}$

32. $f(x)\cdot h(x) - g(x)$

33. $\dfrac{f(x)+h(x)}{g(x)}$

34. $\dfrac{1}{g(x)+h(x)}$

35. $\dfrac{1}{1-h(x)}$

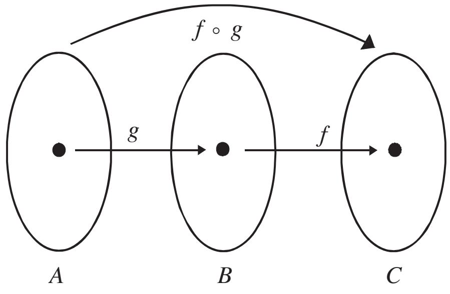
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Función composición (Función de funciones)

Sean f y g funciones cualesquiera que definen una nueva función, la cual recibe el nombre de función composición de f con g y se denota con:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

y es la función cuyo dominio son los elementos del dominio de g, tal que $g(x)$ pertenece al dominio de f; es decir, $D_{f\circ g}$: $\{x \mid x \in D_g \text{ y } g(x) \in D_f\}$



EJEMPLOS

Ejemplos

1 Si $f = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8)\}$ y $g = \{(3, 1), (-1, 3), (-5, 5), (-9, 2)\}$, determina $f \circ g$.

Solución

Se determinan los pares ordenados de la función g, de tal manera que el segundo término sea el primer término de los pares ordenados de la función f. Los primeros términos, de cada par ordenado encontrado, forman el dominio de la función composición.

Los pares ordenados de g que cumplen con la condición son:

$$(3, 1), (-1, 3), (-5, 5)$$

Por tanto, el dominio de la función composición es:

$$D_{fog} : \{-5, -1, 3\}$$

El dominio se evalúa de la siguiente manera:

Por definición $f \circ g = f(g(x))$, entonces el conjunto solución son todas las parejas ordenadas de la forma: $(x, f(g(x)))$

$$f(g(-5)) = f(5) = 6$$

$$f(g(-1)) = f(3) = 4$$

$$f(g(3)) = f(1) = 2$$

Finalmente el conjunto es:

$$f \circ g = \{(-5, 6), (-1, 4), (3, 2)\}$$

2 Determina $f \circ g$; $g \circ f$; $f \circ f$; $g \circ g$, para $f(x) = x + 3$, $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$.

$$f \circ g = f(g(x)) = f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{x}{x-1} + 3 = \frac{x+3(x-1)}{x-1} = \frac{4x-3}{x-1}$$

$$g \circ f = g(f(x)) = g(x+3) = \frac{x+3}{(x+3)-1} = \frac{x+3}{x+2}$$

$$f \circ f = f(f(x)) = f(x+3) = (x+3) + 3 = x + 6$$

$$g \circ g = g(g(x)) = g\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x-(x-1)}{x-1}} = \frac{x(x-1)}{1(x-1)} = x$$

Para determinar $f \circ g \circ h$ se aplica primero h, después g y, por último, f

3 Si $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x - 1$ y $h(x) = x - 4$, determina $f \circ g \circ h$.

Solución

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f(g(x-4)) = f(2(x-4)-1) = f(2x-8-1) = f(2x-9)$$
$$= (2x-9)^2 = 4x^2 - 36x + 81$$

4 Si $F(x) = \sqrt{(x+4)^2 - 5}$, determina f, g y h tal que $F = f \circ g \circ h$

Solución

$F(x) = \sqrt{(x+4)^2 - 5}$, la función dice suma 4, eleva al cuadrado, resta 5 y obtén la raíz.

Entonces se tiene que:

$$h(x) = x + 4 \qquad g(x) = x^2 - 5 \qquad f(x) = \sqrt{x}$$

De tal forma que $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f(g(x+4)) = f((x+4)^2 - 5) = \sqrt{(x+4)^2 - 5}$

EJERCICIO 10

Determina $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$ para las siguientes funciones:

1. $f(x) = 3x^2 - 5x - 2$ y $g(x) = 2x - 3$
2. $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2$
3. $f(x) = 4$ y $g(x) = 2$
4. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5}$ y $g(x) = \sqrt{x^2 + 5}$
5. $f(x) = x^2 + 2x + 1$ y $g(x) = \sqrt{x - 1}$
6. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$
7. $f(x) = \log(x - 2)$ y $g(x) = x - 2$
8. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$ y $g(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$
9. $f(x) = \{(2, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 8)\}$ y $g(x) = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$
10. $f(x) = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16)\}$ y $g(x) = \{(-2, 1), (-1, 2), (0, 3), (1, 4)\}$
11. $f(x) = \{(0, 1), (1, 3), (-1, -1), (-2, -3)\}$ y $g(x) = \{(3, 0), (-2, -2), (1, -1)\}$

Encuentra f de manera que $(f \circ g)(x) = F(x)$

12. $g(x) = \dfrac{3-x}{1-x}$ y $F(x) = \dfrac{1-x}{3-x}$
13. $g(x) = x - 1$ y $F(x) = \sqrt{x - 1}$
14. $g(x) = x^3$ y $F(x) = mx^3 + b$

15. $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ y $F(x) = x^2 - 1$

16. $g(x) = \frac{1}{x}$ y $F(x) = \sqrt{\frac{1-2x}{x}}$

Determina $f \circ g \circ h$

17. $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x$ y $h(x) = 3x - 1$

18. $f(x) = x^3$, $g(x) = 1 - x$ y $h(x) = 4x^2$

19. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 2x - 5$ y $h(x) = x - 2$

20. $f(x) = x^2$, $g(x) = \text{sen}\, x$ y $h(x) = x - 2$

21. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$ y $h(x) = \cos x$

22. $f(x) = \log x$, $g(x) = 10^x$ y $h(x) = \text{sen}\, x$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Funciones par e impar

- Se dice que una función f es par si: $f(-x) = f(x)$.
- Se dice que una función f es impar si: $f(-x) = -f(x)$

EJEMPLOS

1 $f(x) = x^2 - 4$ es función par, ya que

$$f(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4 = f(x).$$

2 $f(x) = 3x^3 + 4x$ es función impar ya que:

$$f(-x) = 3(-x)^3 + 4(-x) = -3x^3 - 4x = -(3x^3 + 4x) = -f(x)$$

3 $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$ no es par ni impar, ya que:

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x)^2 - 5(-x) + 2 = -x^3 - x^2 + 5x + 2 = -(x^3 + x^2 - 5x - 2)$$

$$f(-x) \neq f(x) \quad \text{y} \quad f(-x) \neq -f(x)$$

Observaciones:

Si f y g son funciones pares y h y r funciones impares, entonces se cumple:

I. $f \cdot g$ es par

II. $f \cdot h$ es impar

III. $h \cdot r$ es par

EJERCICIO 11

Indica si f es par, impar o ninguna.

1. $f(x) = x^2 - x$
2. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8$
3. $f(x) = x^3$
4. $f(x) = -x^2 + 2x - 4$
5. $f(x) = (x - 2)^3$
6. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$
7. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$
8. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$
9. $f(x) = (x + 1)^2 + x^3$
10. $f(x) = x^3 - 2x$
11. $f(x) = x^4 - 2x^2$
12. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$
13. $f(x) = 3x^5 - 2x$
14. $f(x) = \sqrt{x^2 + x^4}$
15. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{x^3}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Función inversa

Sea f una función inyectiva con dominio A y contradominio B; la función g que satisface $f(g(x)) = x$, se llama *función inversa* de f y se denota $f^{-1}(x)$ con dominio B y contradominio A.

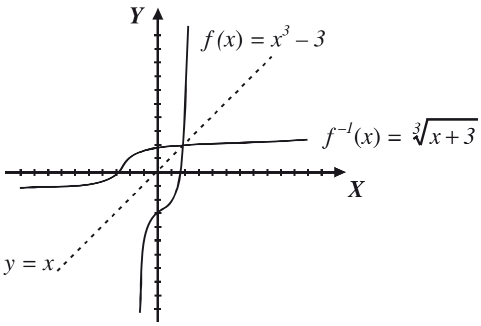
EJEMPLOS

1 Determina la función inversa de $f(x) = x^3 - 3$.

Solución

$f(x) = x^3 - 3$
Al emplear la definición

$$f(f^{-1}(x)) = x \qquad (f^{-1}(x))^3 - 3 = x \qquad (f^{-1}(x))^3 = x + 3 \qquad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+3}$$



Observa que $f^{-1}(x)$ es un reflejo de $f(x)$ sobre la función identidad $y = x$.
Comprobación:

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\sqrt[3]{x+3}\right) = \left(\sqrt[3]{x+3}\right)^3 - 3 = x + 3 - 3 = x$$

Otra forma de obtener la función inversa es resolver la ecuación para x dejándola en términos de y, se intercambia x por $f^{-1}(x)$, y por x.

2 Determina la función inversa de $f(x) = 3x - 12$

Solución

$f(x) = 3x - 12 \rightarrow y = 3x - 12 \rightarrow y + 12 = 3x \rightarrow \frac{y}{3} + 4 = x$

Se intercambia y por x, x por $f^{-1}(x)$: $f^{-1}(x) = \frac{x}{3} + 4$

Comprobación:

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x}{3}+4\right) = 3\left(\frac{x}{3}+4\right) - 12 = x + 12 - 12 = x$$

3 Determina la función inversa de $f(x) = x^2$

Solución

La función no es inyectiva, por tanto, no tiene inversa.

Propiedades

Si f es una función con inversa f^{-1}, entonces

- El dominio de f^{-1} es el rango de f y el rango de f^{-1} es el dominio de f.
- $(f \circ f^{-1})(x) = x$, $(f^{-1} \circ f)(x) = x$
- f^{-1} es invertible y su inversa es f.
- Si f es una función real entonces la gráfica de f^{-1} es el reflejo de f sobre la función $y = x$

EJERCICIO 12

Determina la función inversa (si es posible) para las siguientes funciones:

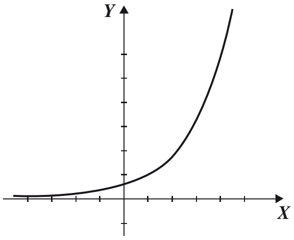
1. $f(x) = x$
2. $f(x) = 2x - 5$
3. $f(x) = x^2 - 9, x \in [0, \infty)$
4. $f(x) = x^2 + 3x + 2$
5. $f(x) = x^3$
6. $f(x) = x^5$
7. $f(x) = x^4, x \in [0, \infty)$
8. $f(x) = \sqrt{3-x}$
9. $f(x) = (2x - 5)^2$
10. $f(x) = \sqrt{4-x^2}, x \in [0, 2]$
11. $f(x) = \sqrt[3]{x+9}$
12. $f(x) = \frac{1}{2x+3}$
13. $f(x) = \sqrt{x^2-1}, x \in [1, \infty)$
14. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$
15. $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

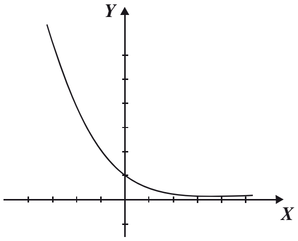
Funciones trascendentes

Función exponencial

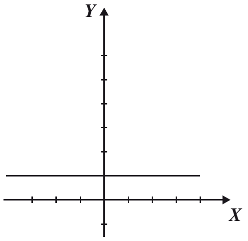
Es una función de la forma $f(x) = a^x$, con dominio $D_f : x \in (-\infty, \infty)$ y rango $y \in (0, \infty)$ (si $a = 1$, entonces el rango es $\{1\}$) y básicamente existen tres tipos:



$f(x) = a^x,\ a > 1$



$f(x) = a^x,\ 0 < a < 1$



$f(x) = 1^x$

EJEMPLOS

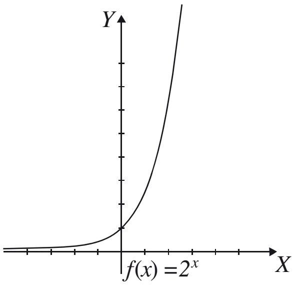
1 Obtén las gráficas de $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 2^{-x}$:

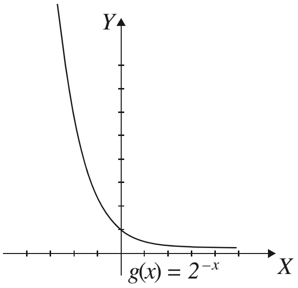
Solución

Se hace una tabulación para cada gráfica y se obtiene:

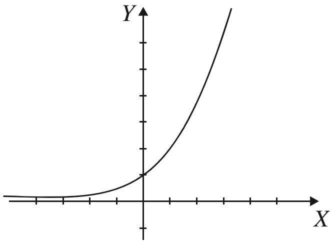
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x) = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$g(x) = 2^{-x}$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$





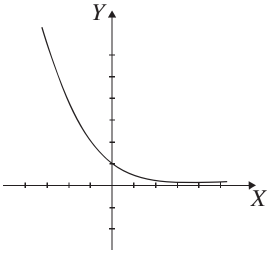
Una de las funciones exponenciales más comunes es: $f(x) = e^x$, con $e \approx 2.71828$



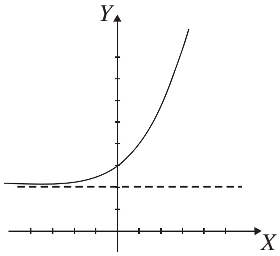
2 Obtén las gráficas de $y = e^{-x}$, $y = e^x + 2$, $y = \frac{2}{3}e^x$, $y = -e^x$, $y = -e^{-x}$

Solución

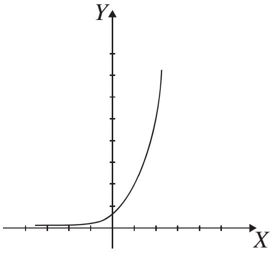
Mediante reflexiones, desplazamientos y alargamientos de una función se obtienen las siguientes gráficas:



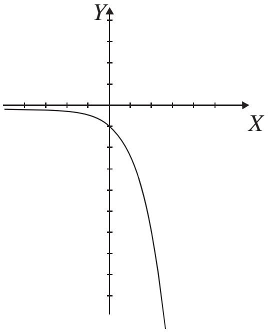
$y = e^{-x}$



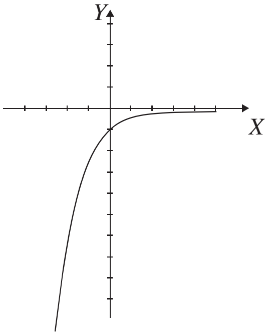
$y = e^x + 2$



$y = \frac{2}{3}e^x$



$y = -e^x$



$y = -e^{-x}$

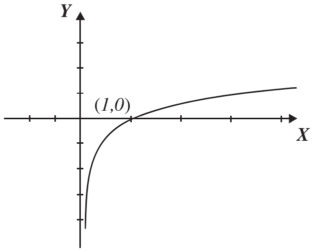
La *función exponencial* $f(x) = a^x$ es inyectiva (ya que es creciente), por tanto, debe tener inversa, la cual es el logaritmo con base a. Un logaritmo se define como el exponente al que se eleva un número llamado base, para obtener cierto número, de tal forma que aplicado a la función exponencial queda:

$$y = a^x \text{ entonces } \log_a y = x,\ y > 0, \text{ por tanto } f^{-1}(x) = \log_a x$$

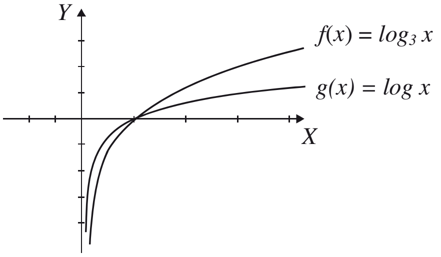
De lo anterior, se define la *función logarítmica* como:

$$g(x) = \log_a x \quad \text{Dominio: } x \in (0, \infty), \text{Rango: } x \in (-\infty, \infty)$$

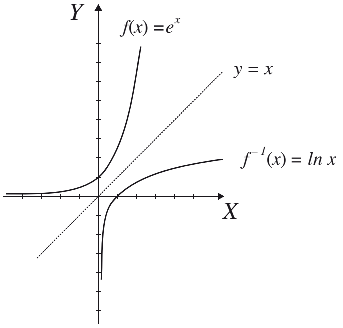
Gráfica:



Pasa por el punto (1, 0), porque $\log_a 1 = 0$ ya que $a^0 = 1$, es creciente y tiene una asíntota vertical en $x = 0$
Por ejemplo, las gráficas de las funciones: $f(x) = \log_3 x$ y $g(x) = \log x$ son:



Por otro lado $\ln x = \log_e x$, por tanto, si $f(x) = e^x$ entonces $f^{-1}(x) = \ln x$



EJEMPLOS

Ejemplos

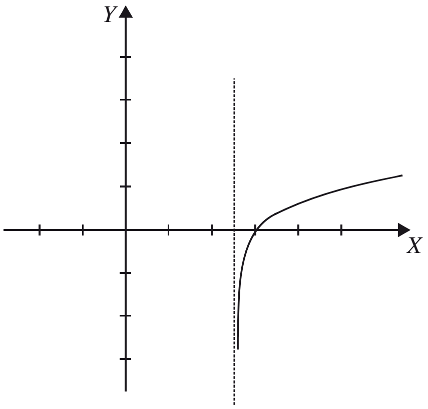
1 Determina la gráfica de $y = \log(2x - 5)$.

Solución

Se determina el dominio; recuerda que $\log_b N = a$, entonces $N > 0$:

$$2x - 5 > 0 \rightarrow x > \frac{5}{2} \rightarrow x \in \left(\frac{5}{2}, \infty\right)$$

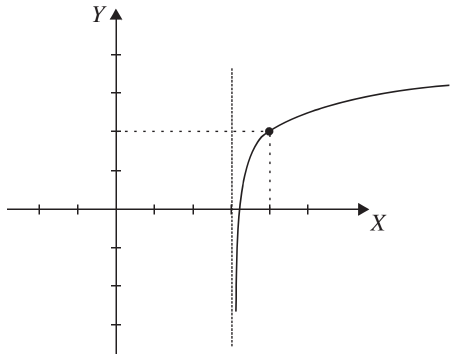
Se traza una asíntota en $x = \frac{5}{2}$ y se desplaza la gráfica $y = \log_{10} x$



2 Determina la gráfica de $y = \log(x - 3) + 2$.

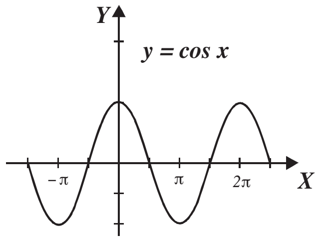
Solución

Se desplaza la gráfica de $y = \log x$ dos unidades hacia arriba y tres a la izquierda

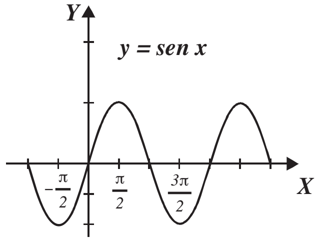


Funciones trigonométricas

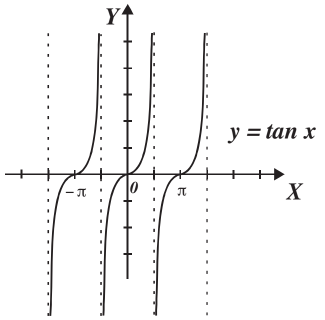
Para la gráfica de las siguientes *funciones trigonométricas* se utilizarán por convención valores en radianes para x.



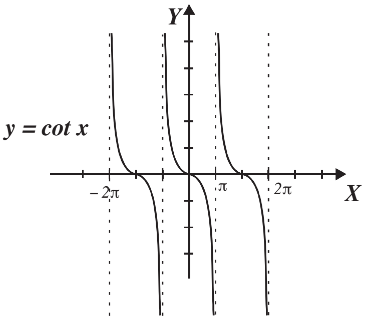
Dominio: $x \in (-\infty, \infty)$
Rango: $y \in [-1, 1]$



Dominio: $x \in (-\infty, \infty)$
Rango: $y \in [-1, 1]$

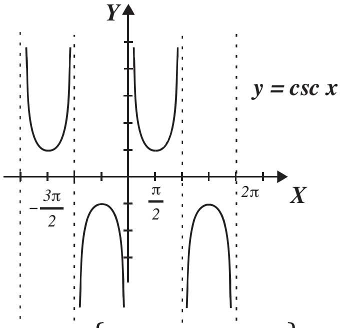


Dominio: $\left\{x \in R \middle| x \neq \frac{(2n-1)\pi}{2}, n \in Z\right\}$
Rango: $y \in (-\infty, \infty)$

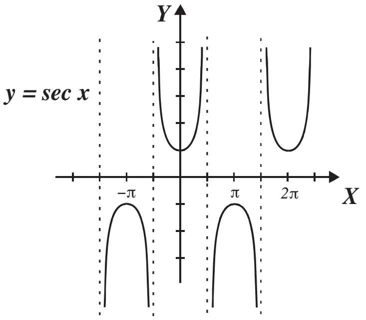


Dominio: $\{x \in R \mid x \neq n\pi, n \in Z\}$
Rango: $y \in (-\infty, \infty)$

Las relaciones $y = \csc x$, $y = \sec x$



Dominio: $\{x \in R \mid x \neq n\pi, n \in Z\}$
Rango: $y \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



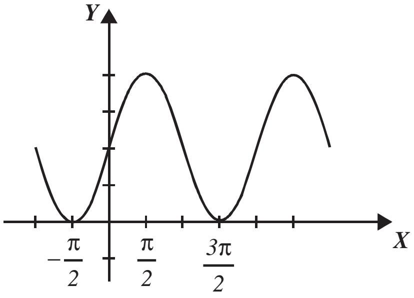
Dominio: $\left\{x \in R \mid x \neq \frac{1}{2} n\pi, n \in Z\right\}$
Rango: $y \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

Ejemplo

Determina la gráfica de $y = 2 \operatorname{sen} x + 2$

Solución

La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ se alarga 2 unidades verticalmente y se desplaza dos unidades hacia arriba, obteniendo la siguiente gráfica:



EJERCICIO 13

Obtén la gráfica de cada una de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 3^x$
2. $y = 3^{-x}$
3. $y = 3^x - 3$
4. $f(x) = e^x + 1$
5. $f(x) = 1 - e^x$
6. $f(x) = e^{-x} + 2$
7. $f(x) = \ln(x - 2)$
8. $f(x) = 1 + \log x$
9. $f(x) = 2 + \ln(x + 1)$
10. $f(x) = 3 \cos x - 2$
11. $f(x) = -2 \operatorname{sen} x + 1$
12. $f(x) = -\tan x$
13. $f(x) = -2 \sec x + 1$
14. $f(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Las funciones como modelos matemáticos

Como se afirmó al principio del capítulo, las funciones representan modelos para resolver problemas de la vida real.

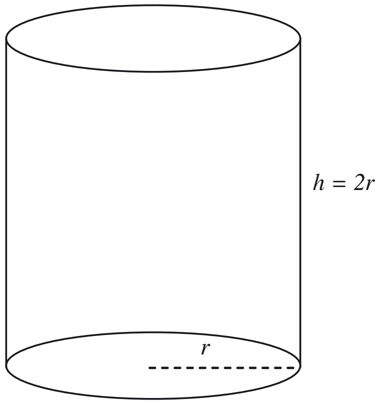
EJEMPLOS

1 La altura de un recipiente cilíndrico es el doble que el radio de su base, expresa el volumen del cilindro en función de su altura.

Solución

El volumen de un cilindro es:

$$V = \pi r^2 h$$



Puesto que la altura es el doble del radio de la base, entonces:

$$h = 2r \rightarrow r = \frac{h}{2}$$

Al sustituir $r = \dfrac{h}{2}$ en el volumen se obtiene:

$$V = \pi r^2 h = \pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \pi\frac{h^2}{4} h = \frac{\pi h^3}{4}$$

Por consiguiente

$$V(h) = \frac{\pi h^3}{4}$$

2 El perímetro de un rectángulo es de 26 unidades, expresa el área del rectángulo en función de su largo.

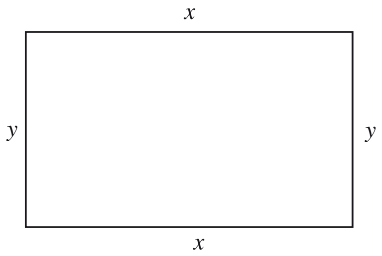
Solución

Se establecen las dimensiones del rectángulo:

x: largo, y: ancho

El perímetro es

$$2x + 2y = 26 \rightarrow x + y = 13$$
$$y = 13 - x$$



El área del rectángulo es

$$A = xy$$

Al sustituir $y = 13 - x$, se obtiene:

$$A = x(13 - x) = 13x - x^2$$

Por consiguiente,

$$A(x) = 13x - x^2$$

3 Una persona tiene una pared de piedra en un costado de un terreno. Dispone de 1 600 m de material para cercar y desea hacer un corral rectangular utilizando el muro como uno de sus lados. Expresa el área del corral en términos del ancho de éste.

Solución

Sean x y y las dimensiones del corral donde,

x: ancho del corral, y: largo del corral

Entonces,

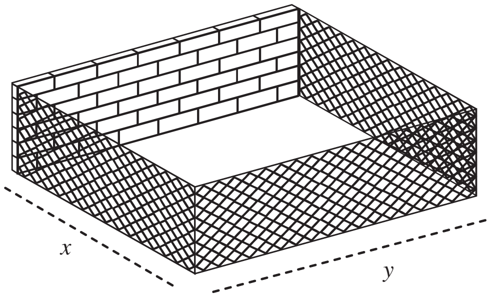
$$2x + y = 1\,600 \rightarrow y = 1\,600 - 2x$$

el área del rectángulo está dada por:

$$A = xy$$

Al sustituir $y = 1\,600 - 2x$, se obtiene:

$$A(x) = x(1\,600 - 2x) = 1\,600x - 2x^2$$



4 Un globo asciende desde un punto con velocidad constante de $1.5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, a 30 m del punto del despegue se encuentra una casa. Si t es el tiempo en segundos, expresa la distancia que existe entre la casa y el globo en función del tiempo.

Solución

Sea $v = \frac{d}{t}$, entonces $d = vt$, donde, d es la distancia, v la velocidad, t el tiempo.

Al transcurrir t segundos el globo sube 1.5 t en metros; entonces se aplica el teorema de Pitágoras para obtener:

$$d^2 = (1.5\,t)^2 + (30)^2 \rightarrow d^2 = \left(\frac{3}{2}t\right)^2 + (30)^2$$

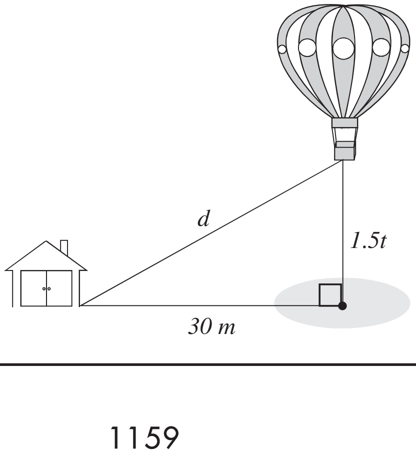
$$d^2 = \frac{9}{4}t^2 + 900$$

$$d = \sqrt{\frac{9t^2 + 3\,600}{4}}$$

$$d = \frac{3}{2}\sqrt{t^2 + 400}$$

Por tanto:

$$d(t) = \frac{3}{2}\sqrt{t^2 + 400}$$



EJERCICIO 14

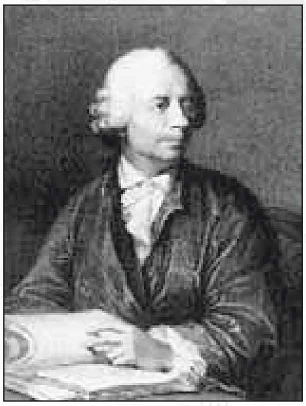
1. El área de la base de un cilindro es de $40\ \pi$ m^2. Expresa el volumen en función de la altura.
2. Fluye agua por un tanque cónico de 10 m de radio y 25 m de altura. Cuando el nivel del agua está a una altura de h y radio r, expresa el volumen del agua en función de la altura.
3. Si el ancho de un rectángulo es la quinta parte de su largo, determina el perímetro en función de su área.
4. Dada una circunferencia de radio r, precisa el área de la circunferencia en función de su diámetro d.
5. Se inscribe un cubo de arista x en una esfera de radio r. Expresa el volumen de la esfera en función de la arista del cubo.
6. Al graficar la recta, cuya ecuación es $3x - 2y + 6 = 0$, y trazar una línea vertical paralela al eje Y en cualquier punto sobre el eje X se genera un triángulo rectángulo. Expresa el área de dicho triángulo en función de la abscisa x.
7. Se desea construir un tanque de gas en forma de cilindro circular recto de 2.5 m de altura y a cada extremo del cilindro van unidas dos semiesferas de radio r. Expresa el volumen del tanque en función de r.
8. Se inscribe un triángulo equilátero de lado x en una circunferencia de radio r. Expresa el área de la circunferencia en función del lado x.
9. Se inscribe un rectángulo en una elipse cuya ecuación es $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$. Precisa el área del rectángulo en función de la abscisa x.
10. Un cartel de base x y altura y tiene un área de 540 cm^2 con márgenes de 2 cm a los lados y 1.5 cm en las partes superior e inferior. Expresa el área impresa en función de la base del cartel.
11. Desde cierto puente de la Ciudad de México un peatón observa un automóvil que viaja a 18 m/s en una avenida perpendicular al puente peatonal. Si t es el tiempo en segundos, determina la distancia entre el peatón y el automóvil en función del tiempo, si la altura del puente es de 4.5 m.
12. Una lancha es remolcada con un cable hacia un muelle. El cable es enrollado a razón de 0.5 m/s y la lancha se encuentra a 2 m por debajo del nivel del muelle. Si t es el tiempo en segundos, expresa la distancia que le falta recorrer a la lancha hacia el muelle en función del tiempo.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 2

LÍMITES

Reseña HISTÓRICA



El número *e*

El número *e* llega por primera vez a las matemáticas de forma muy discreta. Sucedió en 1618 cuando, en un apéndice al trabajo de Napier sobre logaritmos, apareció una tabla dando el logaritmo natural de varios números.

Briggs dio una aproximación numérica al logaritmo base diez de *e* sin mencionar a *e* específicamente en su trabajo.

En 1647 Saint-Vincent calculó el área bajo una hipérbola rectangular, pero no encontró la conexión con los logaritmos, en 1661 Huygens comprendió la relación entre la hipérbola rectangular y el logaritmo. Examinó explícitamente la relación entre el área bajo la hipérbola rectangular $yx = 1$ y el logaritmo.

La notación *e* aparece por primera vez en una carta que le escribió Euler a Goldbach en 1731. Euler hizo varios descubrimientos respecto a *e* en los años siguientes pero no fue sino hasta 1748 cuando Euler dio un tratamiento completo a las ideas alrededor de *e*.

Demostró que:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots = \lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Euler dio una aproximación de *e* con 18 decimales,

$$e = 2.718281828459045235$$

Leonhard Euler
(1707-1783)

Definición intuitiva de límite

Si al aproximar x lo suficientemente cerca de un número a (sin ser a) tanto del lado izquierdo como del derecho, $f(x)$ se aproxima a un número L, entonces el límite cuando x tiende al número a es L. Esto lo escribimos:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Donde la notación $x \to a$ se lee "x tiende a a", para decir que: "tiende a a por la izquierda" se utiliza $x \to a^-$, para decir que: "x tiende a a por la derecha" utilizamos $x \to a^+$, de tal forma que:

Si $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$ entonces $\lim_{x\to a} f(x) = L$

Es decir, si los límites laterales existen y tienden a un mismo número L entonces el límite cuando tiende al número a es L. Para que el límite exista no se necesita que la función esté definida para el número a, basta que esté definida para valores muy cercanos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el límite cuando x tiende a 3 de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

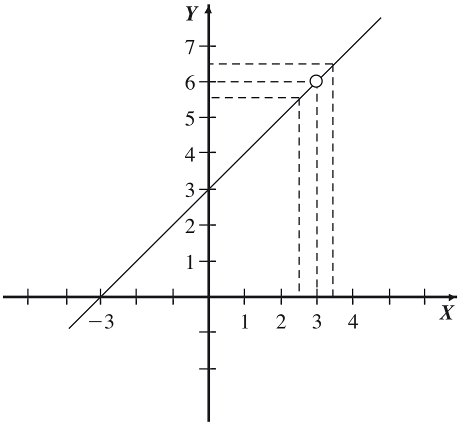
Solución

La función no está definida para $x = 3$, sin embargo, podemos evaluar la función en valores muy cercanos por la izquierda y por la derecha. Por otro lado graficaremos la función utilizando la simplificación:

$$f(x) = \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = x + 3$$

es decir, graficamos la recta $f(x) = x + 3$ con la restricción $x \neq 3$ donde se formará un hueco.

x	f(x)
2.9	5.9
2.99	5.99
2.999	5.999
2.9999	5.9999
3.0001	6.0001
3.001	6.001
3.01	6.01
3.1	6.1



Se observa que para valores de x muy cercanos a 3 por la izquierda (2.9, 2.99, 2.999, 2.9999), $f(x)$ tiende a 6, lo mismo pasa para valores cercanos por la derecha (3.0001, 3.001, 3.01, 3.1), es decir:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 6 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = 6$$

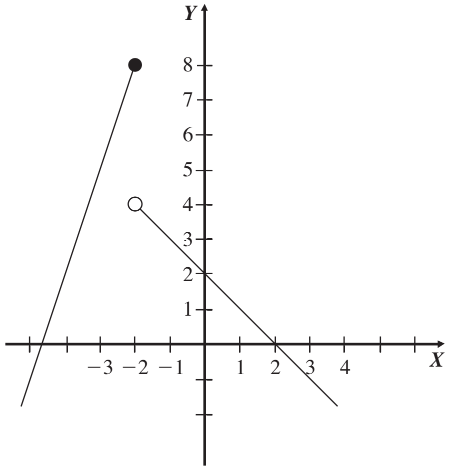
por tanto $\lim_{x\to 3} f(x) = 6$

2 Si $f(x) = \begin{cases} 3x+14 & \text{si } x \leq -2 \\ -x+2 & \text{si } x > -2 \end{cases}$ determina $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

Solución

Graficamos la función y evaluamos en valores muy cercanos a 2.

x	f(x)
−2.1	7.7
−2.01	7.97
−2.001	7.997
−1.999	3.999
−1.99	3.99
−1.9	3.9



Aquí tenemos que: $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 8$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 4$

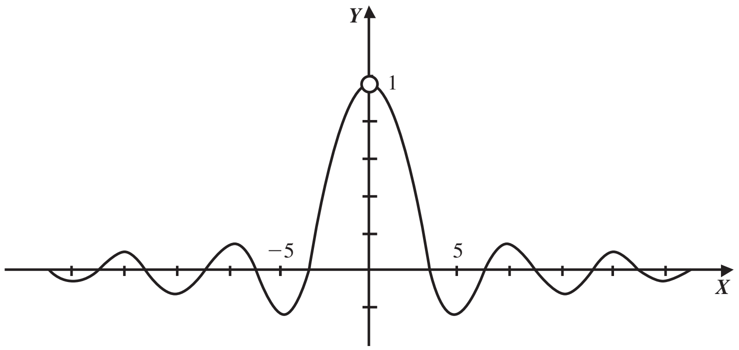
entonces $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$ por tanto $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ no existe

3 Determina $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta}$

Solución

Evaluamos con valores muy cercanos a 0 por la izquierda y por la derecha. Observe que la función no está definida en $\theta = 0$ y que los valores serán tomados como radianes.

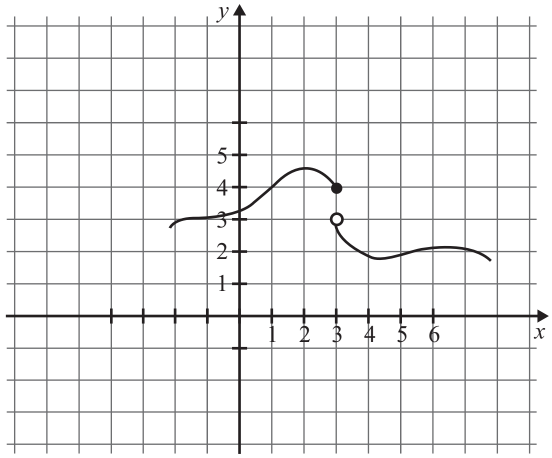
θ	f(θ)
−0.005	0.999995833
−0.004	0.99999733
−0.003	0.9999985
−0.001	0.999999833
0.001	0.999999833
0.003	0.9999985
0.004	0.99999733
0.005	0.999995833



Tenemos: $\lim\limits_{\theta \to 0^-} \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta} = 1$ y $\lim\limits_{\theta \to 0^+} \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta} = 1$

entonces $\lim\limits_{\theta \to 0^-} \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta} = \lim\limits_{\theta \to 0^+} \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta} = 1$ por tanto $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta} = 1$

4 Para la función $f(x)$ mostrada en la figura determina: *a*) $\lim_{x\to 1} f(x)$ y *b*) $\lim_{x\to 3} f(x)$



Solución

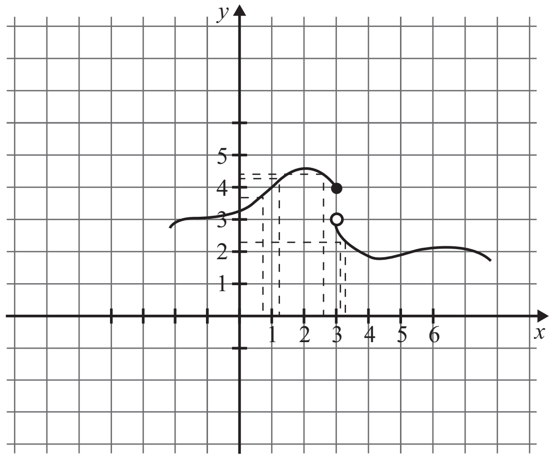
a) Calculamos los límites por la izquierda y derecha

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 4$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 4$

los límites laterales son iguales por tanto $\lim_{x\to 1} f(x) = 4$

b) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 4$ y $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 3$

los límites laterales son diferentes, por tanto $\lim_{x\to 3} f(x)$ no existe



EJERCICIO 15

Utilizando una tabla con valores muy cercanos al valor que tiende el límite, calcula:

1. $\lim_{x\to 2}(x^2-3x+1)$

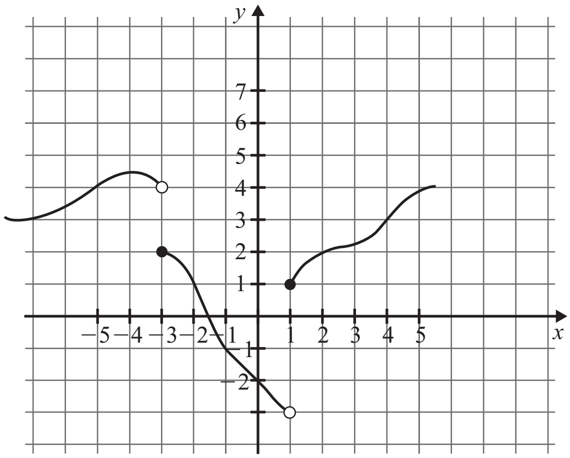
2. $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$

3. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$

5. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\operatorname{sen} x}$

La gráfica de una función $f(x)$ es la siguiente:



De acuerdo con ella determina:

6. $\lim_{x\to -5} f(x)$

7. $\lim_{x\to -3} f(x)$

8. $\lim_{x\to 1} f(x)$

9. $\lim_{x\to 2} f(x)$

10. $\lim_{x\to 4} f(x)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

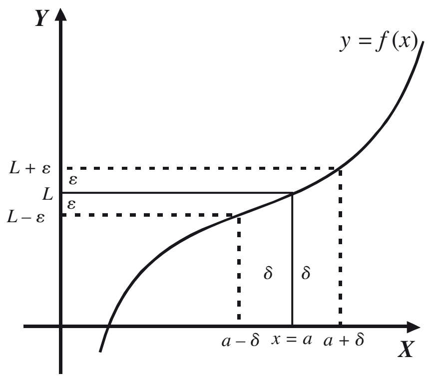
Definición formal de límite

A continuación se presenta la definición formal de límite, la cual también es conocida como definición ε-δ (epsilón-delta).

El $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que:

$$\text{Si } 0 < |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon$$

Dicho de otra forma, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, si para cualquier número positivo elegido ε, por pequeño que sea, existe un número positivo δ tal que, siempre que $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$



La definición nos dice que para $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ existe un número $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño para un número $\varepsilon > 0$ dado, tal que todo x en el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ con excepción posiblemente del mismo a, tendrá su imagen $f(x)$ en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Observa que para un $\delta_1 < \delta$ para el mismo ε, la imagen de un valor x en el intervalo $(a - \delta_1, a + \delta_1)$ estará dentro del intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ lo cual sólo cambia si tomamos un valor de epsilón distinto.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que $\lim\limits_{x\to 3} (2x - 1) = 5$

Solución

Para un $\varepsilon > 0$, se quiere encontrar un $\delta > 0$ tal que siempre que $0 < |x - 3| < \delta$ entonces:

$$|(2x - 1) - 5| < \varepsilon$$

de donde

$$|(2x - 1) - 5| = |2x - 6| = |2(x - 3)| = |2|\,|x - 3| = 2|x - 3| < \varepsilon$$

entonces $|x - 3| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, por lo que basta escoger $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ para que $0 < |x - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Comprobación

Para $0 < |x - 3| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ tenemos que

$$|x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$2|x - 3| < \varepsilon$$

$$|2(x - 3)| < \varepsilon$$

$$|2x - 6| < \varepsilon$$

$$|(2x - 1) - 5| < \varepsilon$$

2 Demuestra que $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-5x-6}{x+1}=-7$

Solución

Si $0<|x-(-1)|<\delta$ entonces $\left|\frac{x^2-5x-6}{x+1}-(-7)\right|<\varepsilon$

de donde

$$\left|\frac{x^2-5x-6}{x+1}+7\right|=\left|\frac{x^2-5x-6+7x+7}{x+1}\right|=\left|\frac{x^2+2x+1}{x+1}\right|$$

$$=\left|\frac{(x+1)^2}{x+1}\right|=|x+1|=|x-(-1)|<\varepsilon$$

por tanto se escoge $\delta=\varepsilon$

3 Si $\lim_{x\to 1}(2-3x)=-1$ y $\varepsilon=0.06$, determina el valor de δ.

Solución

Se aplica la definición y se obtiene:

Si $0<|x-1|<\delta$, entonces $|(2-3x)-(-1)|<\varepsilon$, donde $|3-3x|<\varepsilon$

$$|3|\,|1-x|<\varepsilon$$

$$|1-x|<\frac{\varepsilon}{|3|}$$

Pero $|1-x|=|x-1|$, por tanto, $|x-1|<\frac{\varepsilon}{3}$ y el valor de δ está determinado por:

$$\delta\le\frac{\varepsilon}{3}\le\frac{0.06}{3}\le 0.02$$

EJERCICIO 16

Demuestra los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to 2}(3x+4)=10$
2. $\lim_{x\to 1}(2x-5)=-3$
3. $\lim_{x\to -3}(5-x)=8$
4. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{4}x+1\right)=1$
5. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{x-1}=-3$
6. $\lim_{x\to \frac{1}{2}}(2x-1)=0$
7. $\lim_{x\to -2}(1-3x)=7$
8. $\lim_{x\to 7}\frac{x^2-49}{x-7}=14$
9. $\lim_{x\to -2a}(2a-3x)=8a$
10. $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2}-3x\right)=-\frac{11}{2}$

Obtén el valor de δ o ε en los siguientes ejercicios:

11. Si $\lim_{x\to -1}(3x-2)=-5$ y $\varepsilon = 0.03$, encuentra el valor de δ

12. Si $\lim_{x\to -\frac{2}{5}}(5x+1)=-1$ y $\varepsilon = 0.4$, determina el valor de δ

13. Si $\lim_{x\to 0}(2x+7)=7$ y $\varepsilon = 0.05$, obtén el valor de δ

14. Si $\lim_{x\to -\frac{1}{2}}(3+2x)=2$ y $\varepsilon = 0.8$, ¿cuál es el valor de δ?

15. Si $\lim_{x\to 2}(3x-7)=-1$ y $\delta = 0.06$, determina el valor de ε

16. Si $\lim_{x\to 1}(2-7x)=-5$ y $\delta = 0.0014$, obtén el valor de ε

17. Si $\lim_{x\to \frac{1}{5}}(5x+2)=3$ y $\delta = 0.05$, encuentra el valor de ε

18. Si $\lim_{x\to \frac{4}{3}}(2x+1)=\frac{11}{3}$ y $\delta = 0.001$, ¿cuál es el valor de ε?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Teoremas

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones, c una constante y n número real, entonces:

1. $\lim_{x\to a} c = c$

2. $\lim_{x\to a} x = a$

3. $\lim_{x\to a} c\cdot f(x) = c\cdot \lim_{x\to a} f(x)$

4. $\lim_{x\to a} [f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

5. $\lim_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$

6. $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ con $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$

7. $\lim_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$

Límites por evaluación

El límite se obtiene al aplicar los teoremas anteriores y evaluar el valor al cual tiende la variable en la función propuesta, como se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Utiliza los teoremas anteriores y comprueba que el $\lim_{x\to 2}(x^2+3x-4)=6$

Solución

Se aplican los respectivos teoremas, se evalúa el valor de $x = 2$, y se demuestra que:

$$\lim_{x\to 2}(x^2+3x-4) = \lim_{x\to 2}x^2 + \lim_{x\to 2}3x - \lim_{x\to 2}4 = \left(\lim_{x\to 2}x\right)^2 + 3\lim_{x\to 2}x - \lim_{x\to 2}4 = (2)^2 + 3(2) - 4 = 6$$

2 Si $f(x) = \dfrac{3-2x}{3+2x}$, determina el valor de $\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$

Solución

Se aplican los teoremas y se sustituye el valor de x para obtener el valor buscado:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{3-2x}{3+2x} = \frac{\lim_{x\to\frac{1}{2}}(3-2x)}{\lim_{x\to\frac{1}{2}}(3+2x)} = \frac{\lim_{x\to\frac{1}{2}}3-\lim_{x\to\frac{1}{2}}2x}{\lim_{x\to\frac{1}{2}}3+\lim_{x\to\frac{1}{2}}2x} = \frac{\lim_{x\to\frac{1}{2}}3-2\lim_{x\to\frac{1}{2}}x}{\lim_{x\to\frac{1}{2}}3+2\lim_{x\to\frac{1}{2}}x} = \frac{3-2\left(\frac{1}{2}\right)}{3+2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{3-1}{3+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Estos teoremas nos permiten hacer una sustitución de la variable independiente por el valor al que tiende el límite.

3 Si $f(x) = \dfrac{4}{x^2-4}$, encuentra el valor de $\lim_{x\to 2} f(x)$

Solución

Se sustituye el valor de la variable independiente y se obtiene el límite:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{4}{x^2-4} = \frac{4}{(2)^2-4} = \frac{4}{4-4} = \frac{4}{0}$$

El límite no existe, ya que la división entre cero no está definida.

4 Obtén el $\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{2x+1}$

Solución

Se sustituye $x = 3$ y se realizan las operaciones:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{9-x^2}}{2x+1} = \frac{\sqrt{9-(3)^2}}{2(3)+1} = \frac{\sqrt{9-9}}{6+1} = \frac{0}{7} = 0$$

EJERCICIO 17

Determina el valor de los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to 2}(7-2x)$
2. $\lim_{x\to 3}\left(4x^2-2x-6\right)$
3. $\lim_{x\to -4}(6-3x)$
4. $\lim_{t\to -2}\sqrt{8+t^3}$
5. $\lim_{z\to 2}\sqrt{7z^2+14z-7}$
6. $\lim_{x\to 4}\left(x^2-8\right)\left(4x-8\right)$
7. $\lim_{x\to -3}(6-3x)\left(\frac{3}{5}x^{-1}\right)$
8. $\lim_{x\to -\frac{1}{3}}\left(x^2+\frac{1}{9}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$
9. $\lim_{r\to 4}\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{2}\right)\left(r^2-\frac{4}{r}\right)$
10. $\lim_{y\to 2}\sqrt{4y^2-2y}$
11. $\lim_{y\to -5}(3-y)\sqrt{y^2-9}$
12. $\lim_{z\to -1}\frac{4z+3}{2z+1}$
13. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}+4}{x+5}$
14. $\lim_{z\to \frac{1}{2}}\frac{3z+1}{2z-5}$
15. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{3x+1}$
16. $\lim_{y\to 1}\frac{2+\sqrt{y^2+3}}{y-1}$
17. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen} x+1}{2}$
18. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{\sqrt{2}}$
19. $\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^2-x^2}{x+1}$
20. $\lim_{x\to h}\frac{x^2+h^2}{x+h}$
21. $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{\tan x}{\operatorname{sen}^2 x}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Límites indeterminados

Son aquellos cuyo resultado es de la forma $\frac{0}{0}$.

Ejemplos

Se sustituye el valor de la variable independiente en cada caso y se realizan las respectivas operaciones, para obtener:

1. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2x-6}=\frac{(3)^2-9}{2(3)-6}=\frac{9-9}{6-6}=\frac{0}{0}$

2. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-2x+1}=\frac{\sqrt{1-1}}{(1)^2-2(1)+1}=\frac{\sqrt{0}}{1-2+1}=\frac{0}{0}$

3. $\lim_{y\to 0}\frac{3y^2+5y^4}{2y^2-3y^4}=\frac{3(0)^2+5(0)^4}{2(0)^2-3(0)^4}=\frac{0}{0}$

4. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\frac{\sqrt{(2)^2+5}-3}{2-2}=\frac{\sqrt{9}-3}{0}=\frac{0}{0}$

Se observa que los resultados son de la forma $\frac{0}{0}$, por consiguiente es necesario eliminar la indeterminación.

Una indeterminación se elimina al factorizar o racionalizar (de ser posible) la función, para después simplificarla y obtener el límite.

Casos de factorización:

a) Factor común $ax^n + bx^{n-1} = x^{n-1}(ax+b)$

b) Diferencia de cuadrados $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

c) Trinomio cuadrado perfecto $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

d) Trinomio de la forma $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

e) Suma o diferencia de cubos $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

f) Factorización de $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \dfrac{a-b}{a^{2/3} + a^{1/3}b^{1/3} + b^{2/3}}$

g) Factorización de $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \dfrac{a+b}{a^{2/3} - a^{1/3}b^{1/3} + b^{2/3}}$

h) Factorización de $\sqrt[5]{a} - \sqrt[5]{b}$ $\sqrt[5]{a} - \sqrt[5]{b} = \dfrac{a-b}{a^{4/5} + a^{3/5}b^{1/5} + a^{2/5}b^{2/5} + a^{1/5}b^{3/5} + b^{4/5}}$

i) Factorización de $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$ $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} = \dfrac{a-b}{a^{\frac{n-1}{n}} + a^{\frac{n-2}{n}}b^{\frac{1}{n}} + a^{\frac{n-3}{n}}b^{\frac{2}{n}} + \ldots + a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{n-2}{n}} + b^{\frac{n-1}{n}}}$

EJEMPLOS

1 Obtén el $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2 + 5x^4}{2x^2 + 6x^4 - 7x^8}$

Solución

Al sustituir x con 0 en la función, el límite se indetermina:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 + 5x^4}{2x^2 + 6x^4 - 7x^8} = \frac{3(0)^2 + 5(0)^4}{2(0)^2 + 6(0)^4 - 7(0)^8} = \frac{0}{0}$$

Para eliminar la indeterminación se factorizan el numerador y el denominador con la aplicación del factor común:

$$\frac{3x^2 + 5x^4}{2x^2 + 6x^4 - 7x^8} = \frac{x^2(3 + 5x^2)}{x^2(2 + 6x^2 - 7x^6)}$$

Al simplificar la expresión se obtiene:

$$\frac{3 + 5x^2}{2 + 6x^2 - 7x^6}$$

Luego el límite es:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 + 5x^4}{2x^2 + 6x^4 - 7x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{3 + 5x^2}{2 + 6x^2 - 7x^6} = \frac{3 + 5(0)^2}{2 + 6(0)^2 - 7(0)^6} = \frac{3}{2}$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 + 5x^4}{2x^2 + 6x^4 - 7x^8} = \frac{3}{2}$$

2 Determina el $\lim_{x\to -2} \frac{4-x^2}{x+2}$

Solución

Se sustituye el valor de $x = -2$ en la expresión:

$$\lim_{x\to -2} \frac{4-x^2}{x+2} = \frac{4-(-2)^2}{-2+2} = \frac{4-4}{-2+2} = \frac{0}{0}$$

Se factoriza el numerador con la aplicación de la diferencia de cuadrados:

$$4-x^2 = (2+x)(2-x)$$

Se simplifica y sustituye para obtener,

$$\lim_{x\to -2} \frac{4-x^2}{x+2} = \lim_{x\to -2} \frac{(2+x)(2-x)}{x+2} = \lim_{x\to -2}(2-x) = 2-(-2) = 4$$

Por consiguiente:

$$\lim_{x\to -2} \frac{4-x^2}{x+2} = 4$$

3 Calcula el valor del $\lim_{y\to 1} \frac{y^2-2y+1}{y^2-4y+3}$

Solución

Al sustituir $y = 1$ se verifica que existe la indeterminación:

$$\lim_{y\to 1} \frac{y^2-2y+1}{y^2-4y+3} = \frac{(1)^2-2(1)+1}{(1)^2-4(1)+3} = \frac{1-2+1}{1-4+3} = \frac{0}{0}$$

Al factorizar el numerador (trinomio cuadrado perfecto) y el denominador (trinomio de la forma $x^2 + (a+b)x + ab$), se obtiene:

$$\lim_{y\to 1} \frac{y^2-2y+1}{y^2-4y+3} = \lim_{y\to 1} \frac{(y-1)^2}{(y-3)(y-1)} = \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{y-3} = \frac{1-1}{1-3} = \frac{0}{-2} = 0$$

Finalmente, el resultado es:

$$\lim_{y\to 1} \frac{y^2-2y+1}{y^2-4y+3} = 0$$

4 Determina el $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{2x^2-3x-2}$

Solución

Al sustituir $x = 2$ se observa que existe la indeterminación:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{2x^2-3x-2} = \frac{(2)^3-8}{2(2)^2-3(2)-2} = \frac{8-8}{8-6-2} = \frac{0}{0}$$

Se factoriza la diferencia de cubos y el trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$.

$$x^3-8 = (x-2)(x^2+2x+4), \qquad 2x^2-3x-2 = (x-2)(2x+1)$$

Se simplifica, se sustituye y se obtiene el valor del límite:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{2x^2-3x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(2x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{2x+1}=\frac{(2)^2+2(2)+4}{2(2)+1}=\frac{12}{5}$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{2x^2-3x-2}=\frac{12}{5}$$

5 Calcula el valor del $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}}$

Solución

Se sustituye $x = 2$ en la función:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}}=\frac{(2)^2-4}{3-\sqrt{2+7}}=\frac{4-4}{3-3}=\frac{0}{0}$$

Se racionaliza el denominador de la función, multiplicando por $3+\sqrt{x+7}$, que es el conjugado de la expresión $3-\sqrt{x+7}$:

$$\frac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}}\cdot\frac{3+\sqrt{x+7}}{3+\sqrt{x+7}}=\frac{(x^2-4)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{(3)^2-\left(\sqrt{x+7}\right)^2}=\frac{(x^2-4)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{9-(x+7)}=\frac{(x^2-4)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{2-x}$$

Se factoriza $x^2 - 4$:

$$\frac{(x^2-4)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{2-x}=\frac{(x-2)(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{2-x}=\frac{-(2-x)(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{2-x}$$

Se simplifica la expresión,

$$\frac{-(2-x)(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{2-x}=-(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)$$

Se calcula el valor del límite:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}}=\lim_{x\to 2}\left[-(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)\right]=-(2+2)\left(3+\sqrt{2+7}\right)=-(4)(3+3)=-24$$

Por consiguiente, el resultado es:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}}=-24$$

6 Determina $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}$

Solución

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\cdot\frac{x-2}{x^{2/3}+x^{1/3}2^{1/3}+2^{2/3}}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^{2/3}+x^{1/3}2^{1/3}+2^{2/3}}$$

$$=\frac{1}{2^{2/3}+2^{1/3}\cdot 2^{1/3}+2^{2/3}}$$

$$=\frac{1}{2^{2/3}+2^{2/3}+2^{2/3}}$$

$$=\frac{1}{3\cdot 2^{2/3}}$$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{2^2}}$$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$$

Por tanto $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}=\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$

EJERCICIO 18

Determina el valor de los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to 0}\frac{3x+2x^2}{5x+6x^3}$
2. $\lim_{h\to 0}\frac{2h^3-5h^2+h}{h^4-h^2}$
3. $\lim_{y\to 0}\frac{4y^5+5y^3}{y^4-y^2}$
4. $\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx^3}{cx^2+dx^3}$
5. $\lim_{x\to 0}\frac{5x^n-3x^{n-1}+4x^{n-2}}{2x^n-6x^{n-2}}$
6. $\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z^2-1}$
7. $\lim_{x\to \frac{2}{3}}\frac{9x^2-4}{3x-2}$
8. $\lim_{y\to -h}\frac{y+h}{h^2-y^2}$
9. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{4-x^2}$
10. $\lim_{w\to a}\frac{a^2-w^2}{a-w}$
11. $\lim_{z\to 7}\frac{z^2-5z-14}{z-7}$
12. $\lim_{x\to -3}\frac{x^2+6x+9}{x^2+7x+12}$
13. $\lim_{h\to 1}\frac{h-1}{h^2-4h+3}$
14. $\lim_{x\to -5}\frac{x^2-25}{x^2+2x-15}$

15. $\lim\limits_{v\to 4}\frac{v^2-6v+8}{2v^2-8v}$

16. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-8x+15}{x^2-7x+12}$

17. $\lim\limits_{h\to \frac{1}{2}}\frac{4h^2+4h-3}{2h-1}$

18. $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}}\frac{3x-2}{3x^2-11x+6}$

19. $\lim\limits_{w\to -\frac{4}{3}}\frac{9w^2+9w-4}{3w^2+7w+4}$

20. $\lim\limits_{y\to 6}\frac{2y^2-15y+18}{3y^2-17y-6}$

21. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{2x^2-13x+15}{x^2-x-20}$

22. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\frac{9x^2-1}{6x^2+5x+1}$

23. $\lim\limits_{y\to -1}\frac{y+1}{y^3+1}$

24. $\lim\limits_{h\to \frac{1}{2}}\frac{8h^3-1}{1-2h}$

25. $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}}\frac{27x^3-8}{9x^2-4}$

26. $\lim\limits_{w\to -2}\frac{w^2+5w+6}{w^3+8}$

27. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{4}}\frac{64x^3-1}{4x^3-x^2}$

28. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

29. $\lim\limits_{y\to -2}\frac{y+2}{\sqrt{y+3}-1}$

30. $\lim\limits_{w\to 0}\frac{\sqrt{w}}{\sqrt{w+3}-\sqrt{3}}$

31. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{\sqrt{4x^2+3}-2}{2x-1}$

32. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$

33. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{1-\sqrt{3x-2}}$

34. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x^2+9}-5}{\sqrt{x+5}-3}$

35. $\lim\limits_{w\to 0}\frac{a-\sqrt{w^2+a^2}}{b-\sqrt{w^2+b^2}}$

36. $\lim\limits_{y\to p}\frac{\sqrt[n]{y}-\sqrt[n]{p}}{y-p}$

37. $\lim\limits_{v\to 0}\frac{\sqrt{4-2v+v^2}-2}{v}$

38. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-7x+6}{x^3+x^2-4x-4}$

39. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^2+4x+3}$

40. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4+2x^3-11x^2-12x+36}{x^3-2x^2-x+2}$

41. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-4x+4}{x^3+6x^2+5x-12}$

42. $\lim\limits_{y\to 2}\frac{y^3-6y^2+12y-8}{y^4-4y^3+16y-16}$

43. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{x-1}$

44. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x^2-a^2}$

45. $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}}\frac{\sqrt[3]{9x^2+4}-2}{3x-2}$

46. $\lim\limits_{y\to 2}\frac{\sqrt[4]{y^3+8}-\sqrt{2+y}}{y-2}$

47. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt[4]{x+h}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}$

48. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-\sqrt[3]{4x+19}}{x-2}$

49. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{\sqrt[3]{x-1}-1}$

50. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt[5]{2x+3}-1}{x^5+1}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Límites cuando x tiende al infinito

Sea una función f definida en el intervalo (a, ∞). Si se tiene que:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

entonces significa que los valores de $f(x)$ se aproximan a L tanto como se quiera para una x lo suficientemente grande, sabemos que ∞ no es un número, sin embargo, se acostumbra decir "el límite de $f(x)$, cuando x tiende al infinito, es L".

Cuando en una función $x \to \infty$, se busca la base de mayor exponente y ésta divide a cada uno de los términos de la función, después, para obtener el valor del límite, se aplica el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{c}{x^n} = 0 \text{ , con } c \text{ constante}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{6x^2 + 2x - 1}$

Solución

La base del término con mayor exponente es x^2, por consiguiente, todos los términos del numerador y del denominador se dividen entre esta base:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{6x^2 + 2x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{4}{x^2}}{\frac{6x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}$$

Se simplifica y aplica el teorema para obtener el límite,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}}{6 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x\to\infty} 2 - \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x} + \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x^2}}{\lim_{x\to\infty} 6 + \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} - \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}} = \frac{2 - 0 + 0}{6 + 0 - 0} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Por consiguiente, $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{6x^2 + 2x - 1} = \frac{1}{3}$

2 Determina el $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 5}}{2x + 3}$

Solución

La base del término con mayor exponente es x, por tanto, se dividen los términos entre esta base y se simplifica la expresión para obtener el valor del límite.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 5}}{2x + 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{9x^2 - 5}}{x}}{\frac{2x + 3}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{9x^2 - 5}{x^2}}}{2 + \frac{3}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9 - \frac{5}{x^2}}}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{\sqrt{\lim_{x\to\infty} 9 - \lim_{x\to\infty} \frac{5}{x^2}}}{\lim_{x\to\infty} 2 + \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{9 - 0}}{2 + 0} = \frac{\sqrt{9}}{2} = \frac{3}{2}$$

3 Determina el resultado de $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{x^3+2}$

Solución

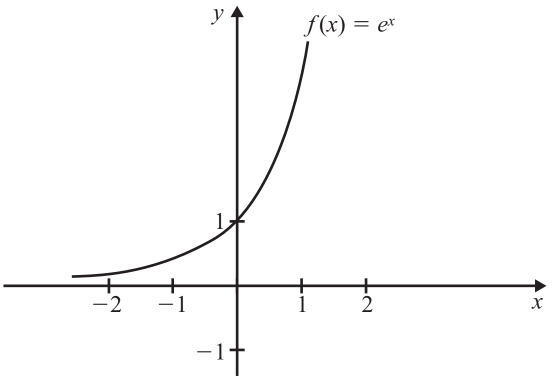
Se dividen todos los términos entre x^3, se simplifica y se obtiene el valor del límite.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{x^3+2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x}{x^3}+\frac{2}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{1+\frac{2}{x^3}} = \frac{\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^3}}{\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^3}} = \frac{0+0}{1+0}=\frac{0}{1}=0$$

Finalmente:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{x^3+2} = 0$$

Si observamos la gráfica de la función exponencial $f(x) = e^x$, tenemos que cuando $x \to -\infty$, $f(x)$ tiende a cero.

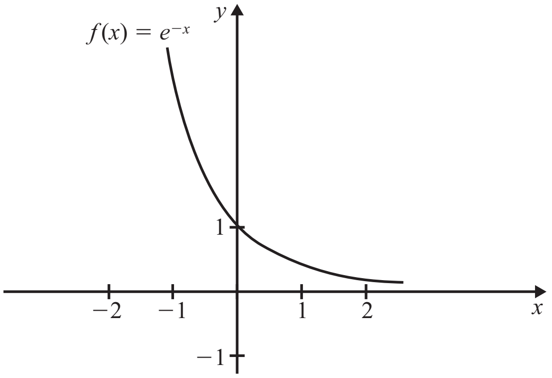


entonces $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

esto cumple también cuando tenemos la función $g(x) = a^x$ para $a > 0$, es decir

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \text{ para } a > 0$$

Por otro lado, si tenemos $f(x) = e^{-x}$, tenemos que cuando $x \to \infty$, $f(x)$ se aproxima a cero.



entonces $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$

También se cumple $\lim_{x\to\infty} a^{-x} = 0$ para $a > 0$

EJERCICIO 19

Obtén los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x+8}{4x+3}$

2. $\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{2y^2-3y+5}{y^2-5y+2}$

3. $\lim\limits_{w\to\infty}\dfrac{3w^2+5w-2}{5w^3+4w^2+1}$

4. $\lim\limits_{h\to\infty}\dfrac{5h^4-2h^2+3}{3h^3+2h^2+h}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{18x^2-3x+2}{2x^2+5}}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3-2x^2+3}}{2x+1}$

7. $\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{2}{y^3}-3y^4}{9y^4-\dfrac{5}{y^2}-3}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^{-1}+3x^{-2}}{x^{-2}+4}$

9. $\lim\limits_{v\to\infty}\dfrac{\sqrt{v^2+1}}{\sqrt[3]{v^3-3}}$

10. $\lim\limits_{h\to\infty}\dfrac{\sqrt{h^2+4}-\sqrt{h^2-4}}{h}$

11. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{11x+6}{4-6x}$

12. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

13. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(3x-2)(3x+1)}{(2x+7)(x-2)}$

14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$

15. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-5x+3}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}$

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_mx^m+...+a_1x+a_0}{b_nx^n+...+a_1x+b_0}$

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^n+bx^m}{cx^n-dx^m}$ con $n>m$

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{ax^n+1}}{x}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Asíntotas horizontales

Sea la función $y=f(x)$, si la curva tiene una asíntota horizontal en $y=c$, entonces la ecuación de la asíntota es:

$$y=\lim_{x\to\infty}f(x)\quad \text{o}\quad y=\lim_{x\to-\infty}f(x)$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra la ecuación de la asíntota horizontal de $f(x)=\dfrac{3x+1}{2x+3}$

Solución

Al aplicar $y=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$, se obtiene:

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x+1}{x}}{\frac{2x+3}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}}=\frac{3}{2}$$

Por tanto, la curva tiene una asíntota horizontal en $y=\dfrac{3}{2}$ o $2y-3=0$

2 Determina la ecuación de la asíntota horizontal de $y = \frac{x}{x^2+1}$

Solución

Se aplica $y = \lim_{x\to\infty} f(x)$, entonces la asíntota horizontal tiene por ecuación:

$$y = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

El resultado $y = 0$ indica que la asíntota horizontal es el eje X.

3 Obtén la ecuación de la asíntota horizontal de $f(x) = \frac{x^2+1}{x-3}$

Solución

Se aplica la definición $y = \lim_{x\to\infty} f(x)$ y se obtiene:

$$y = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x-3} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+1}{x^2}}{\frac{x-3}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}} = \frac{1}{0}$$

El límite no existe ya que la división entre cero no está definida.

El resultado indica que la curva no tiene asíntotas horizontales.

EJERCICIO 20

Encuentra las ecuaciones de las asíntotas horizontales de las siguientes funciones:

1. $y = \frac{2x+3}{4x-5}$
2. $f(x) = \frac{1}{x}$
3. $f(x) = \frac{x^2-4}{5}$
4. $y = \frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$
5. $f(x) = \frac{2x^3+3x^2+3x+1}{x^3-1}$
6. $y = \frac{ax+b}{cx-d}$
7. $f(x) = \frac{2}{x+2}$
8. $xy + 2x - 1 = 0$
9. $f(x) = 2x + 5$
10. $f(x) = \frac{ax^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n}{bx^n + b_1x^{n-1} + ... + b_n}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Asíntotas oblicuas

Se le denomina asíntota oblicua a aquella recta cuyo ángulo de inclinación θ es diferente de 0° y 90°.

Caso I

Sea una función racional de la forma $f(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$ donde el grado de $Q(x)$ es un grado mayor que el grado de $P(x)$ y $P(x)$ no es factor de $Q(x)$, entonces $f(x)$ tiene una asíntota oblicua en la recta $y = ax + b$ siendo $f(x) = ax + b + \dfrac{R(x)}{P(x)}$ si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0 \quad \text{o} \quad \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina las ecuaciones de las asíntotas y traza la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x+1}$

Solución

La función no tiene asíntotas horizontales, pero sí posee una asíntota vertical en $x = -1$

El grado del numerador es un grado mayor que el grado del denominador y éste no es factor del numerador, entonces:

$$f(x) = x - 1 + \frac{3}{x+1}$$

Para obtener la asíntota oblicua se aplica cualquiera de las dos condiciones:

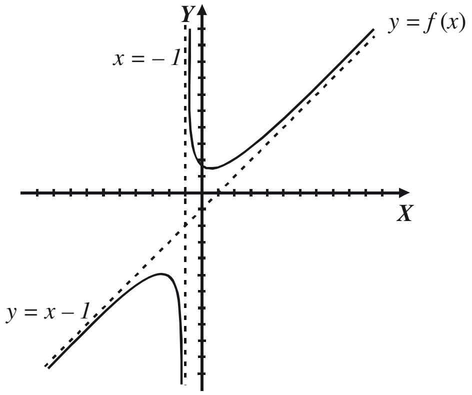
$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - (ax+b)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - (x-1)\right]$$

Pero $f(x) - (x - 1) = \dfrac{3}{x+1}$, por tanto:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{0}{1+0} = 0$$

La función tiene una asíntota oblicua en la recta $y = x - 1$



2 Obtén las ecuaciones de las asíntotas y traza la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$

Solución

La función carece de asíntotas verticales y horizontales, para obtener las asíntotas oblicuas la función se representa de la siguiente forma:

$$f(x) = x + \frac{1-x}{x^2+1}$$

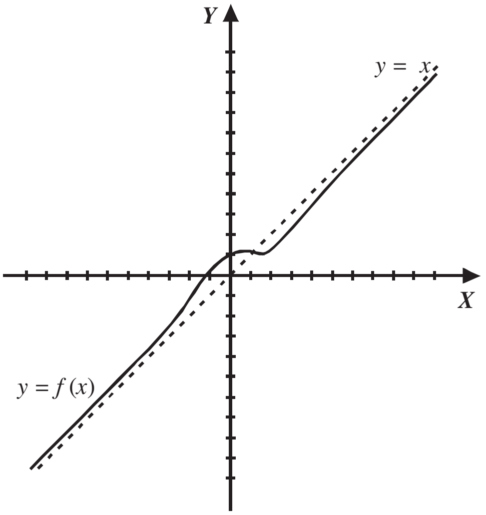
Para comprobar que $y = x$ es la ecuación de la asíntota oblicua, se aplica la definición:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3+1}{x^2+1}-x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-x}{x^2+1}\right)$$

Se obtiene el límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-x}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}\right) = \frac{0-0}{1+0} = 0$$

Por tanto, la función tiene una asíntota oblicua en $y = x$



Analicemos otro método; sea una función racional de la forma $f(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$ donde el grado de $Q(x)$ es un grado mayor que el de $P(x)$ y $P(x)$ no es factor de $Q(x)$, entonces $f(x)$ tiene una asíntota oblicua en la recta $y = ax + b$, cuyos valores de a y b están dados por:

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]$$

Ejemplo

Obtén las ecuaciones de las asíntotas y traza la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 3}{x}$

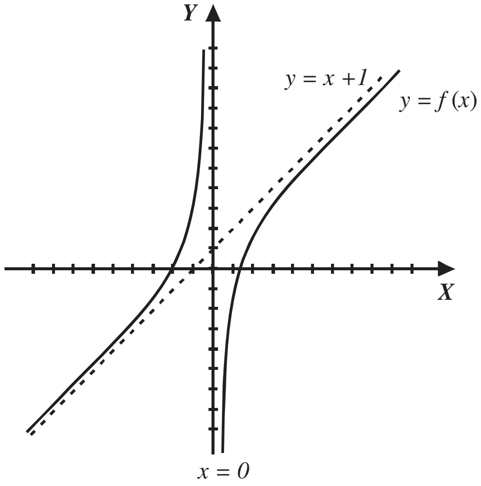
Solución

La función tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y no tiene asíntota horizontal, para obtener la ecuación de la asíntota oblicua se aplican los límites anteriores:

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\dfrac{x^2 + x - 3}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 + x - 3}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}\right) = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2 + x - 3}{x} - x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2 + x - 3 - x^2}{x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left(1 - \frac{3}{x}\right) = 1$$

Se sustituyen a y b en la ecuación $y = ax + b$, por tanto, la asíntota es: $y = x + 1$
Gráfica



Caso II

Sea una función $f(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$ donde el grado de $Q(x)$ es mayor que uno y mayor al grado de $P(x)$, la función tiene una asíntota oblicua no lineal.

Ejemplo

Determina las ecuaciones de las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^2}$

Solución

Esta función tiene una asíntota vertical en $x = 0$

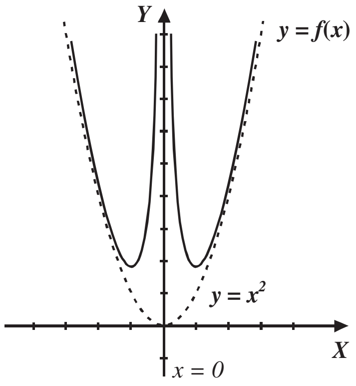
Se realiza el cociente y el resultado es:

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

Entonces:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

Por consiguiente, la función tiene una asíntota cuya ecuación es $y = x^2$



EJERCICIO 21

De las siguientes funciones determina las ecuaciones de las asíntotas y traza sus gráficas:

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 2}$
2. $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x - 3}$
3. $f(x) = \dfrac{4x^2 - 4x + 5}{2x - 1}$
4. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x + 2}$
5. $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3 + 1}$
6. $f(x) = \dfrac{x^5}{x^4 - 1}$
7. $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 1}{x}$
8. $f(x) = \dfrac{1}{(x^3 - 3x^2)^{-\frac{1}{3}}}$
9. $f(x) = \dfrac{x^5 + 1}{x^2 - 1}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Límites laterales

Límite por la derecha

Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo abierto (x_o, b), el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a x_o por la derecha es L y se representa:

$$\lim_{x \to x_o^+} f(x) = L$$

Lo anterior denota que $f(x)$ se aproxima a L cuando x tiende a aproximarse con valores mayores que x_o

Límite por la izquierda

Sea una función definida en el intervalo abierto (a, x_o), el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a x_o, por la izquierda es L y se representa:

$$\lim_{x \to x_o^-} f(x) = L$$

Lo anterior denota que $f(x)$ se aproxima a L cuando x tiende a aproximarse con valores menores que x_o

Teorema

El límite cuando $x \to x_o$ de una función $f(x)$, existe y es igual a L, si y solo si los límites laterales son iguales a L, es decir

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_o^+} f(x) = \lim_{x \to x_o^-} f(x) = L$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el $\lim_{x\to 2} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x<2 \\ 5-x^2 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$

Solución

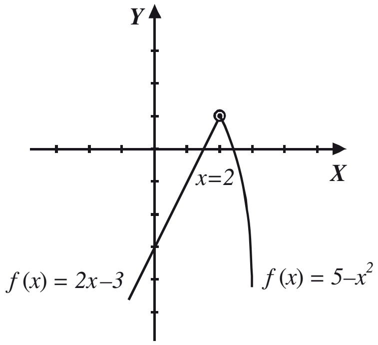
Se calculan los límites laterales:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (2x-3) = 2(2)-3 = 1$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (5-x^2) = 5-(2)^2 = 5-4 = 1$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$$

Por consiguiente el $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$



2 Calcula el $\lim_{x\to 0} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} \sqrt{9-x^2} & \text{si } x\geq 0 \\ 2x+1 & \text{si } x<0 \end{cases}$

Solución

Se obtienen los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(0)^2} = 3$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (2x+1) = 2(0)+1 = 1$$

Dado que, $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$, entonces el $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

La existencia de un límite lateral no implica la existencia del otro (ejemplo anterior). Cuando $f(x)$ está definida de un solo lado, entonces el $\lim_{x\to x_o} f(x)$ es igual al límite lateral de dicho lado.

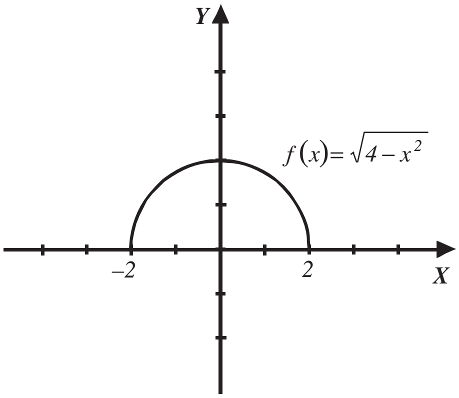
3 ¿Cuál es el $\lim_{x\to 2} f(x)$ si $f(x) = \sqrt{4-x^2}$?

Solución

Esta función está definida en el intervalo $-2 \leq x \leq 2$, por tanto, los valores de x tienden únicamente a 2 por la izquierda, entonces el valor del límite es:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-(2)^2} = 0$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 0$$



EJERCICIO 22

Para las siguientes funciones, determina el valor de los límites indicados:

1. Si $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 3 \\ 2x+5 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ — *a)* $\lim_{x\to 3^+} f(x)$, *b)* $\lim_{x\to 3^-} f(x)$, *c)* $\lim_{x\to 3} f(x)$

2. Si $g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < -2 \\ x^2-5 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ -6 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ — *a)* $\lim_{x\to -2^+} g(x)$, *b)* $\lim_{x\to -2^-} g(x)$, *c)* $\lim_{x\to -2} g(x)$, *d)* $\lim_{x\to 1^+} g(x)$, *e)* $\lim_{x\to 1^-} g(x)$, *f)* $\lim_{x\to 1} g(x)$

3. Si $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x}-1 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ \frac{x^2-11}{3} & \text{si } 3 < x \end{cases}$ — *a)* $\lim_{x\to 1^+} h(x)$, *b)* $\lim_{x\to 1^-} h(x)$, *c)* $\lim_{x\to 1} h(x)$, *d)* $\lim_{x\to 3^+} h(x)$, *e)* $\lim_{x\to 3^-} h(x)$, *f)* $\lim_{x\to 3} h(x)$

4. Si $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x-1} & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } 2 < x < 4 \end{cases}$ — *a)* $\lim_{x\to -1^+} f(x)$, *b)* $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, *c)* $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, *d)* $\lim_{x\to 2} f(x)$, *e)* $\lim_{x\to 4^-} f(x)$

5. Si $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \leq 2 \\ 2x & \text{si } 2 < x < 4 \\ \sqrt{x+5} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$ — *a)* $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, *b)* $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, *c)* $\lim_{x\to 2} f(x)$, *d)* $\lim_{x\to 4^-} f(x)$, *e)* $\lim_{x\to 4^+} f(x)$, *f)* $\lim_{x\to 4} f(x)$

6. Si $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x - 10}{x+2} & \text{si } x \leq -2 \\ \dfrac{3-2x}{x^2-5} & \text{si } x > -2 \end{cases}$ $\qquad \lim\limits_{x \to -2} f(x)$

7. Si $h(\theta) = \begin{cases} \text{sen}\,\theta & \text{si } \theta < \dfrac{\pi}{2} \\ -\cos 2\theta & \text{si } \theta \geq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ $\qquad \lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} h(\theta)$

8. Si $g(x) = \begin{cases} 3e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 3 + 7\log(x+1) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0} g(x)$

9. Si $w(x) = \begin{cases} \sqrt{4 - 3\,\text{sen}\,x} & \text{si } x < \pi \\ \dfrac{3\cos x + 5}{1 - \log\left(\text{sen}\,\dfrac{x}{2}\right)} & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$ $\qquad \lim\limits_{x \to \pi} w(x)$

10. Si $f(x) = \begin{cases} \text{sen}\,x + \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{4 - x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0} f(x)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Límites de funciones trigonométricas

A continuación se muestra la tabla de valores de las funciones trigonométricas de los ángulos notables, así como los ángulos de 0, $\dfrac{\pi}{2}$, π, $\dfrac{3\pi}{2}$ y 2π

Ángulos en radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
Coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	No existe	0	No existe	0
Cotangente	No existe	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	No existe	0	No existe
Secante	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	No existe	-1	No existe	1
Cosecante	No existe	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	No existe	-1	No existe

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el valor del $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} 2x$

Solución

Se sustituye el valor de $x = \frac{\pi}{4}$ en la función:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$$

Por consiguiente, el valor del límite es 1.

2 ¿Cuál es el valor del $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x - 3\cos 2x}{1+x}$?

Solución

Al sustituir $x = 0$, se obtiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x - 3\cos 2x}{1+x} = \frac{\operatorname{sen}\ 2(0) - 3\cos 2(0)}{1+0} = \frac{\operatorname{sen} 0 - 3\cos 0}{1} = \frac{0-3(1)}{1} = -3$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x - 3\cos 2x}{1+x} = -3$

3 Obtén $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan\frac{x}{2} - \cos 2x}{\operatorname{sen} x + 1}$

Solución

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan\frac{x}{2} - \cos 2x}{\operatorname{sen} x + 1} = \frac{\tan\frac{\frac{\pi}{2}}{2} - \cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + 1} = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \cos\pi}{1+1} = \frac{1-(-1)}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

Por consiguiente, el valor del límite es 1.

EJERCICIO 23

Calcula los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos 3x}{x+3}\right)$
2. $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{6}}(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)$
3. $\lim\limits_{\alpha\to\pi}\left(2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\right)$
4. $\lim\limits_{w\to 0}\frac{\tan^2 w - 1}{\tan^2 w + 1}$
5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\frac{4\cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}}$
7. $\lim\limits_{h\to\frac{\pi}{3}}\frac{\tan h}{\operatorname{sen}^2 h - 1}$
8. $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$
9. $\lim\limits_{w\to\pi}\frac{\sec^2 w}{1-\operatorname{sen}^2 w}$
10. $\lim\limits_{\beta\to\frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{sen}\beta - \cos\beta}{\tan\beta - \sqrt{3}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Límites trigonométricos indeterminados

Para evitar la indeterminación en un límite de funciones trigonométricas, se transforma la función utilizando identidades trigonométricas, en ocasiones con esto es suficiente, también se puede simplificar hasta obtener una expresión de la siguiente forma:

$$\frac{\text{sen } x}{x}, \quad \frac{1-\cos x}{x} \quad \text{o} \quad \frac{\cos x - 1}{x}$$

y utilizar los siguientes teoremas:

$$\lim_{v\to 0}\frac{\text{sen } v}{v} = 1; \quad \lim_{v\to 0}\frac{1-\cos v}{v} = \lim_{v\to 0}\frac{\cos v - 1}{v} = 0$$

A continuación se da una lista de las identidades que se pueden utilizar.

Identidades trigonométricas fundamentales	**Funciones del ángulo doble**
$\tan\alpha = \frac{\text{sen }\alpha}{\cos\alpha}$	$\text{sen } 2\alpha = 2\text{ sen }\alpha\cos\alpha$
$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen }\alpha}$	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$
$\text{sen }\alpha\csc\alpha = 1 \begin{cases} \text{sen }\alpha = \frac{1}{\csc\alpha} \\ \csc\alpha = \frac{1}{\text{sen }\alpha} \end{cases}$	$\cos 2\alpha = 2\text{ sen}^2\alpha - 1$ $\cos 2\alpha = 1 - 2\cos^2\alpha$
$\cos\alpha\sec\alpha = 1 \begin{cases} \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} \\ \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \end{cases}$	$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ **Funciones de suma o diferencia de ángulos**
$\tan\alpha\cot\alpha = 1 \begin{cases} \tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} \\ \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} \end{cases}$	$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen }\alpha\cos\beta \pm \text{sen }\beta\cos\alpha$ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \text{sen }\alpha\text{ sen }\beta$
$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \begin{cases} \text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \\ \cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha \end{cases}$	**Transformaciones de sumas o restas de funciones trigonométricas a producto** $\text{sen }\alpha + \text{sen }\beta = 2\text{ sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$	$\text{sen }\alpha - \text{sen }\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$	$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
	$\cos\alpha - \cos\beta = -2\text{ sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan\theta}{\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}$

Solución

Se sustituye $\theta=\frac{\pi}{4}$, resultando:

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan\theta}{\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}=\frac{1-\tan\frac{\pi}{4}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{1-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{0}{0}$$

Para eliminar la indeterminación, se aplican las identidades trigonométricas con el fin de obtener una expresión equivalente que no se indetermine:

$$\frac{1-\tan\theta}{\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}=\frac{1-\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}=\frac{\frac{\cos\theta-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{-\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}=\frac{\cos\theta-\operatorname{sen}\theta}{-\cos\theta(\cos\theta-\operatorname{sen}\theta)}=-\frac{1}{\cos\theta}$$

Se calcula el valor del límite:

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan\theta}{\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\left(-\frac{1}{\cos\theta}\right)=\frac{-1}{\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$$

Por consiguiente, $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan\theta}{\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}=-\sqrt{2}$

2 Calcula el $\lim_{w\to 0}\frac{\cos w-\cos 2w}{\operatorname{sen}^2 w}$

Solución

Al evaluar el límite:

$$\lim_{w\to 0}\frac{\cos w-\cos 2w}{\operatorname{sen}^2 w}=\frac{\cos 0-\cos 2(0)}{\operatorname{sen}^2(0)}=\frac{1-1}{(0)^2}=\frac{0}{0}$$

Se indetermina la función, por consiguiente, se transforma mediante identidades trigonométricas, como se ilustra:

$$\lim_{w\to 0}\frac{\cos w-\cos 2w}{\operatorname{sen}^2 w}=\lim_{w\to 0}\frac{\cos w-(\cos^2 w-\operatorname{sen}^2 w)}{\operatorname{sen}^2 w}=\lim_{w\to 0}\frac{\cos w-\cos^2 w+\operatorname{sen}^2 w}{\operatorname{sen}^2 w}$$

$$=\lim_{w\to 0}\left[\frac{\cos w\,(1-\cos w)+\operatorname{sen}^2 w}{\operatorname{sen}^2 w}\right]=\lim_{w\to 0}\left[\frac{\cos w\,(1-\cos w)}{\operatorname{sen}^2 w}+\frac{\operatorname{sen}^2 w}{\operatorname{sen}^2 w}\right]\lim_{w\to 0}\left[\frac{\cos w\,(1-\cos w)}{1-\cos^2 w}+1\right]$$

$$=\lim_{w\to 0}\left[\frac{\cos w\,(1-\cos w)}{(1+\cos w)(1-\cos w)}+1\right]=\lim_{w\to 0}\left[\frac{\cos w}{1+\cos w}+1\right]$$

Se aplica el límite:

$$=\lim_{w\to 0}\left[\frac{\cos w}{1+\cos w}+1\right]=\frac{\cos 0}{1+\cos 0}+1=\frac{1}{1+1}+1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

Finalmente, el valor del límite es $\frac{3}{2}$

3 Obtén el $\lim_{x\to 0}\frac{2\text{ sen }3x}{x}$

Solución

Para que $\lim_{x\to 0}\frac{2\text{ sen }3x}{x}$ adopte la forma $\lim_{v\to 0}\frac{\text{sen }v}{v}$, se multiplica por 3 tanto el numerador como el denominador

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\text{ sen }3x}{x}\cdot\frac{3}{3}=\lim_{x\to 0}\frac{6\text{ sen }3x}{3x}=6\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }3x}{3x}=6(1)=6$$

Por tanto, $\lim_{x\to 0}\frac{2\text{ sen }3x}{x}=6$

4 ¿Cuál es el valor del $\lim_{y\to 0}\frac{\cos ay-\cos by}{y^2}$?

Solución

Se sustituye $y=0$ en la función:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\cos ay-\cos by}{y^2}=\frac{\cos a(0)-\cos b(0)}{(0)^2}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

Se transforma la diferencia de cosenos en producto,

$$\cos ay-\cos by=-2\text{ sen}\left(\frac{ay+by}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{ay-by}{2}\right)=-2\text{ sen}\frac{(a+b)y}{2}\text{sen}\frac{(a-b)y}{2}$$

Entonces:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\cos ay-\cos by}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{-2\text{ sen}\frac{(a+b)y}{2}\text{sen}\frac{(a-b)y}{2}}{y^2}$$

$$=-2\cdot\lim_{y\to 0}\left[\frac{\text{sen}\frac{(a+b)y}{2}}{y}\cdot\frac{\text{sen}\frac{(a-b)y}{2}}{y}\right]$$

$$=-2\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\text{sen}\frac{(a+b)y}{2}}{y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\text{sen}\frac{(a-b)y}{2}}{y}$$

$$=-2\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\text{sen}\frac{(a+b)y}{2}}{y}\cdot\frac{\frac{(a+b)}{2}}{\frac{(a+b)}{2}}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\text{sen}\frac{(a-b)y}{2}}{y}\cdot\frac{\frac{(a-b)}{2}}{\frac{(a-b)}{2}}$$

$$=\frac{-2(a+b)}{2}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\text{sen}\frac{(a+b)y}{2}}{\frac{(a+b)y}{2}}\cdot\frac{(a-b)}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\text{sen}\frac{(a-b)y}{2}}{\frac{(a-b)y}{2}}$$

$$=\frac{-2(a+b)}{2}(1)\cdot\frac{(a-b)}{2}(1)$$

$$=\frac{-2(a^2-b^2)}{4}=\frac{b^2-a^2}{2}$$

Por tanto, $\lim_{y\to 0}\frac{\cos ay-\cos by}{y^2}=\frac{b^2-a^2}{2}$

5 Determina el valor de $\lim_{x\to 0}\frac{1+(x-1)\cos x}{4x}$

Solución

Se evalúa la función para $x = 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+(x-1)\cos x}{4x}=\frac{1+(0-1)\cos(0)}{4(0)}=\frac{1+(-1)(1)}{4(0)}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

Se transforma la expresión de la siguiente forma

$$\frac{1+(x-1)\cos x}{4x}=\frac{1+x\cos x-\cos x}{4x}=\frac{1-\cos x+x\cos x}{4x}=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1-\cos x}{x}+\frac{x\cos x}{x}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1-\cos x}{x}+\cos x\right]$$

entonces

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+(x-1)\cos x}{4x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{4}\left[\frac{1-\cos x}{x}+\cos x\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}+\lim_{x\to 0}\cos x\right]$$

$$= \frac{1}{4}[0+1]$$

$$= \frac{1}{4}(1)$$

$$= \frac{1}{4}$$

Por tanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+(x-1)\cos x}{4x}=\frac{1}{4}$$

EJERCICIO 24

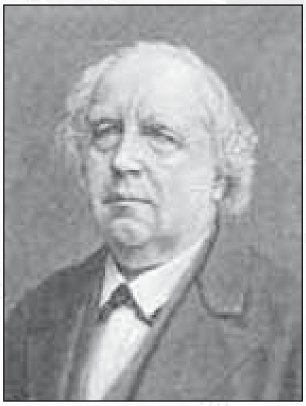
Determina el valor de los siguientes límites:

1. $\lim_{w\to 0}\frac{w^2}{\cos w-1}$
2. $\lim_{\theta\to 0}\frac{\text{sen } 3\theta}{\tan 4\theta}$
3. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\text{sen}^2 x}$
4. $\lim_{\alpha\to 0}\frac{2\text{ sen }\alpha-\tan 2\alpha}{\alpha}$
5. $\lim_{v\to 0}\frac{1-\sec v}{v^2\sec v}$
6. $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\text{sen}^2\theta}{\tan^3\theta}$
7. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(\cos x-1)^2}}{\tan x}$
8. $\lim_{w\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2w}{\cos w-\text{sen } w}$
9. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sqrt{1-\text{sen } x}-\sqrt{1+\text{sen } x}}$
10. $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\tan(3+\alpha)-\tan(3-\alpha)}{\text{sen}(3-\alpha)-\text{sen}(3+\alpha)}$
11. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2(a^2-b^2)}{\cos ax-\cos bx}$
12. $\lim_{x\to 0}\frac{(\text{sen } x)^m}{(\text{sen } 2x)^m}$
13. $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\tan\theta$
14. $\lim_{w\to 0}\left(\frac{1}{\tan w}-\frac{1}{\text{sen } w}\right)$
15. $\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2\tan x-\text{sen } 2x}$
16. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^3\csc^2 x}$
17. $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}^2 3x}{x^2}$
18. $\lim_{w\to 0}\frac{\sec 2w-1}{w\sec 2w}$
19. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos mx-\cos nx}{2x^2}$
20. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos^2 2x}{x}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 3
CONTINUIDAD

Reseña HISTÓRICA



En el siglo XIX la matemática se apoyaba en la geometría y el álgebra para buscar sustento a sus afirmaciones.

En el cálculo infinitesimal se siguieron las líneas que le eran posibles con el sustento conceptual, como la existencia de funciones continuas.

Es cuando Weierstrass publica en 1872, gracias a su discípulo Paul Du Bois Reymond, su teorema sobre la existencia de funciones continuas que en algunos puntos no tenían derivada; las consecuencias de este teorema fueron de gran interés, en su época se decía que una función era continua si su gráfica se podía trazar sin despegar el lápiz del papel, aún en nuestra época esto da una idea informal de la continuidad de una función.

Pero el resultado de Weierstrass mostró que se podía hablar de la continuidad en un lenguaje totalmente analítico, sin necesidad de recurrir a imágenes geométricas. Este lenguaje proporcionó la advertencia sobre lo peligroso que resultaba confiar demasiado en las conclusiones extraídas de un dibujo.

Karl Weierstrass
(1815-1897)

Continuidad puntual

Una función $f(x)$ es continua en el punto $x_o \in R$ si cumple con las siguientes condiciones:

1. $f(x_o)$ está definida.
2. $\lim_{x \to x_o} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Verifica si $f(x) = x^2 - 1$ es continua en $x_o = 2$

Solución

Se deben verificar las tres condiciones:

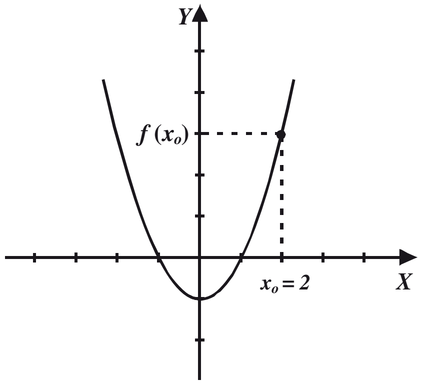
1. $f(2) = (2)^2 - 1 = 3$, por tanto $f(x)$ está definida para $x_o = 2$
2. Se calcula el valor de cada límite lateral:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 - 1) = (2)^2 - 1 = 3$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^2 - 1) = (2)^2 - 1 = 3$$

   Entonces, $\lim_{x \to 2} f(x)$ sí existe y $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$

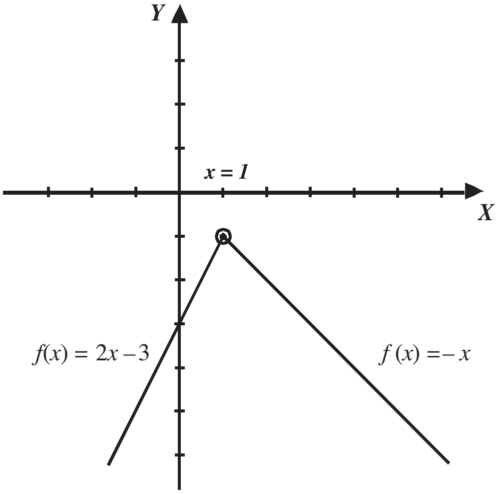
3. Como $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$ y $f(2) = 3$, entonces $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$, por consiguiente, $f(x)$ es continua en $x_o = 2$



2 Determina si la función $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 1 \\ -x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ es continua en $x_o = 1$

Solución

Se verifican las condiciones:



1. $f(1) = -(1)$

   $f(1) = -1$, la función está definida en $x_o = 1$

2. Se determinan los límites laterales:

   $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x - 3) = 2(1) - 3 = -1$

   $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (-x) = -(1) = -1$

   Por tanto, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -1$

3. Probar que el $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

   $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = -1$

   Finalmente, es continua en $x_o = 1$

3 Determina si la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x - 3 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ 3 & \text{si } 3 < x \end{cases}$ es continua en $x = 1$ y $x = 3$

Solución

Se verifican las condiciones para los puntos $x = 1$ y $x = 3$:

1. $f(1) = (1)^2 = 1$, la función está definida en $x_o = 1$

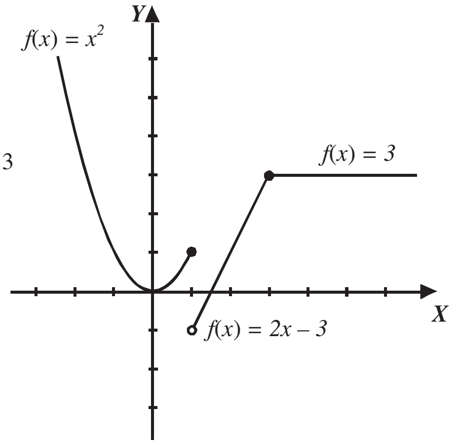
2. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x - 3) = 2(1) - 3 = -1;$

   $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = (1)^2 = 1$

   Debido a que el $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, entonces $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ no existe.

   Por tanto, $f(x)$ no es continua en $x_o = 1$

   Se verifica la continuidad en $x_o = 3$



1. $f(3) = 2(3) - 3 = 3$, la función está definida en $x_o = 3$

2. $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} 3 = 3;\ \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (2x - 3) = 2(3) - 3 = 3$

   Se concluye que,

   $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$

   Entonces, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 3$

3. $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 3$ y $f(x) = 3$ entonces, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$

   Por consiguiente, $f(x)$ es continua en $x_o = 3$

4 Es continua $g(x) = \begin{cases} \text{sen}\, x & \text{si} \quad x < \dfrac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{si} \quad x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ en $x_o = \dfrac{\pi}{2}$

Solución

Si se verifican los pasos se obtiene:

1. $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ no está definida, por tanto, la función no es continua en $x_o = \dfrac{\pi}{2}$

Discontinuidad evitable o removible

Sea $f(x)$ una función racional no continua en $x = x_0$, si mediante una simplificación algebraica, $f(x)$ se vuelve continua en $x = x_o$, entonces recibe el nombre de discontinuidad evitable o removible.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Verifica si es continua la función $f(x) = \dfrac{6x^2 - 7x + 2}{2x - 1}$ en $x = \dfrac{1}{2}$

Solución

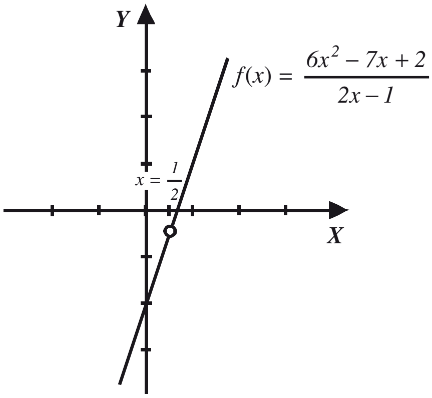
1. Se evalúa la función en $x = \dfrac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{6\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{1}{2}\right) + 2}{2\left(\frac{1}{2}\right) - 1} = \frac{6\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{7}{2} + 2}{1 - 1} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{7}{2} + 2}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

La función se indetermina o no está definida para el valor de $x = \dfrac{1}{2}$, lo cual implica que es discontinua en este punto; sin embargo, se elimina la indeterminación mediante una simplificación algebraica.

$$f(x) = \frac{6x^2 - 7x + 2}{2x - 1} = \frac{(3x - 2)(2x - 1)}{2x - 1} = 3x - 2; \text{ si } x \neq \frac{1}{2}$$

Esta simplificación indica que la gráfica es una línea recta con discontinuidad evitable o removible en $x = \dfrac{1}{2}$



2 Determina si la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6}$ es continua en $x = 3$ y traza su gráfica.

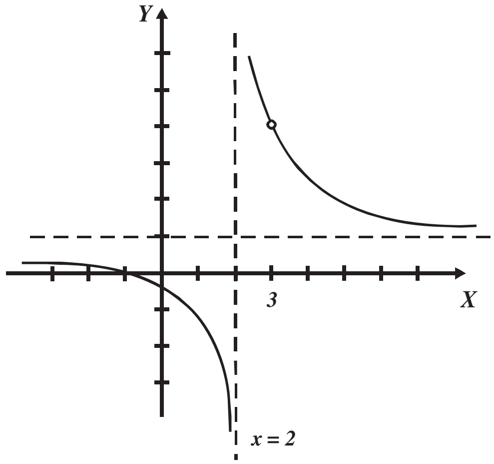
1. Se evalúa la función en $x = 3$,

$$f(3) = \frac{(3)^2 - 2(3) - 3}{(3)^2 - 5(3) + 6} = \frac{9 - 6 - 3}{9 - 15 + 6} = \frac{0}{0}$$

La función no está definida en $x = 3$, sin embargo, mediante una simplificación se puede eliminar la discontinuidad,

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6} = \frac{(x - 3)(x + 1)}{(x - 3)(x - 2)} = \frac{x + 1}{x - 2}\ \text{, si } x \neq 3$$

La gráfica de esta función es una hipérbola con discontinuidad evitable o removible en $x = 3$



3 Determina el valor de k para que la función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - k, & x < 1 \\ 2kx - 3, & x \geq 1 \end{cases}$$

Solución

Se obtienen los límites laterales:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (3x - k) = 3(1) - k = 3 - k$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2kx - 3) = 2\text{k}(1) - 3 = 2k - 3$$

Para que el límite exista:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

entonces:

$$\begin{aligned} 3 - k &= 2k - 3 \\ -k - 2k &= -3 - 3 \\ -3k &= -6 \\ k &= \frac{-6}{-3} \\ k &= 2 \end{aligned}$$

por tanto, para que la función sea continua $k = 2$, es decir la función se debe escribir:

$$f(x) = \begin{cases} 3x-2, & x<1 \\ 4x-3, & x\geq 1 \end{cases}$$

Comprobación

Probemos que la función es continua en $x = 1$

i) $f(1) = 4(1) - 3 = 4 - 3 = 1$

ii) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (3x - 2) = 3(1) - 2 = 3 - 2 = 1$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (4x - 3) = 4(1) - 3 = 4 - 3 = 1$

$\lim_{x\to 1^{-1}} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$

por tanto $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe y $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$

iii) $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = 1$

Por tanto $f(x)$ es continua en $x = 1$.

4 Determina los valores de a y b para que la función sea continua

$$f(x) = \begin{cases} ax-3 & x\leq -2 \\ x^2-1 & -2<x<3 \\ bx+1 & x\geq 3 \end{cases}$$

Solución

Se obtienen los límites laterales en $x = -2$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} (ax - 3) = a(-2) - 3 = -2a - 3$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} (x^2 - 1) = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

Para que el límite exista se debe cumplir:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^+} f(x)$$

Entonces:

$$-2a - 3 = 3$$
$$-2a = 3 + 3$$
$$-2a = 6$$
$$a = \frac{6}{-2}$$
$$a = -3$$

Por tanto $a = -3$
Se obtienen los límites laterales en $x = 3$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (bx + 1) = b(3) + 1 = 3b + 1$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (x^2 - 1) = (3)^2 - 1 = 9 - 1 = 8$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x)$$

entonces

$$\begin{aligned} 3b + 1 &= 8 \\ 3b &= 8 - 1 \\ 3b &= 7 \\ b &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto $b = \dfrac{7}{3}$

EJERCICIO 25

Verifica si las funciones propuestas son continuas en los puntos indicados:

1. $f(x) = 2x^2 - x$, en $x = 0$
2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, en $x = 2$
3. $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x+3}$, en $x = -\dfrac{3}{2}$
4. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x+1}}$, en $x = 3$
5. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$, en $x = 2$
6. $f(x) = \dfrac{1}{\text{sen } x}$, en $x = 2\pi$
7. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x < 2 \\ 2x - 1 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$, en $x = 2$
8. $g(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x^2 - 4 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$, en $x = 1$
9. $h(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x + 3 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$, en $x = 0$
10. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < -2 \\ x^2 - 2 & \text{si} \quad -2 \leq x < 2 \\ 3x - 4 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$, en $x = -2$ y $x = 2$
11. $q(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x} & \text{si} \quad x < 1 \\ -3x + 5 & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ \sqrt{2x} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$, en $x = 1$ y $x = 2$
12. $h(x) = \begin{cases} \text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) & \text{si} \quad x \leq \pi \\ \cos x & \text{si} \quad \pi < x \leq \dfrac{3}{2}\pi \\ \tan\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) & \text{si} \quad x > \dfrac{3}{2}\pi \end{cases}$, en $x = \pi$ y $x = \dfrac{3}{2}\pi$

13. $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x < -3 \\ x^2 - 2 & \text{si } -3 \leq x < 3 \\ \log(x+7)^7 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$, en $x = -3$ y $x = 3$

14. $g(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$, en $x = 3$

15. $h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$, en $x = 1$

16. $g(x) = \dfrac{x^3 + 8}{x^2 - 4}$, en $x = -2$

17. $f(x) = \dfrac{x - 8}{x^2 + x - 72}$, en $x = 8$

18. $w(x) = \dfrac{6x^2 - x - 1}{4x^2 - 4x + 1}$, en $x = \dfrac{1}{2}$

Determina el valor de *k* para que las siguientes funciones sean continuas:

19. $f(x) = \begin{cases} 2x + k & \text{si } x < 2 \\ 3kx - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

20. $f(x) = \begin{cases} k^2 - x & \text{si } x \leq 0 \\ 2k + 3x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

21. $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x + k} & \text{si } x < 3 \\ kx - 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

Obtén el valor de las constantes para que las siguientes funciones sean continuas:

22. $f(x) = \begin{cases} ax + 3 & \text{si } x \leq -4 \\ x^2 - 4 & \text{si } -4 < x < 1 \\ bx + 4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

23. $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 0 \\ 3xb - 2 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 2a - x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

24. $f(x) = \begin{cases} ax + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ a + bx & \text{si } 1 < x < 4 \\ ax - 2b & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Continuidad de una función en un intervalo

Continuidad por la derecha

Una función $f(x)$ es continua a la derecha de x_o si y solo si para $x \in R$ se cumplen las siguientes condiciones:

1. $f(x_o)$ existe
2. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ existe
3. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

Continuidad por la izquierda

Una función $f(x)$ es continua a la izquierda de x_o si y solo si para $x \in R$:

1. $f(x_o)$ existe
2. $\lim\limits_{x \to x_o^-} f(x)$ existe
3. $\lim\limits_{x \to x_o^-} f(x) = f(x_o)$

Continuidad de una función en un intervalo abierto

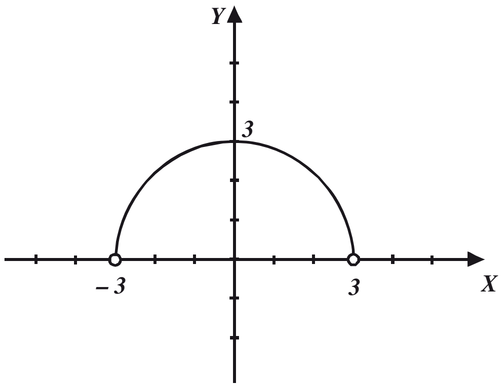
Se dice que $f(x)$ es continua en el intervalo abierto (a, b) si y solo si es continua en todos los puntos del intervalo.

EJEMPLOS

1 Demuestra que $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ es continua en el intervalo $(-3, 3)$

Solución

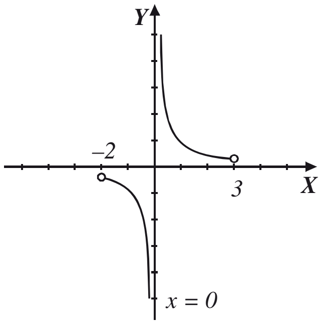
La función $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ está definida en todos los puntos del intervalo $(-3, 3)$, como se ilustra en la gráfica, por consiguiente, $f(x)$ es continua en dicho intervalo.



2 ¿$f(x) = \dfrac{1}{x}$ es continua en el intervalo $(-2, 3)$?

Solución

$f(x)$ no está definida en $x = 0$; entonces no es continua en este punto, por tanto, no es continua en el intervalo $(-2, 3)$



Continuidad en un intervalo cerrado

Una función $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ si es continua en el intervalo abierto (a, b) y además

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \text{ y } \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$$

EJEMPLOS

1 Demuestra que $f(x) = x^2 - 2x$ es continua en el intervalo cerrado $[-1, 2]$

Demostración

La función $f(x)$ es polinomial, lo cual implica que está definida en el intervalo abierto $(-1, 2)$, por tanto, es continua en el intervalo, ahora se prueba la continuidad en los extremos del intervalo.

Para $x = -1$

a) $f(-1) = (-1)^2 - 2(-1) = 3$

b) $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (x^2 - 2x) = 3$

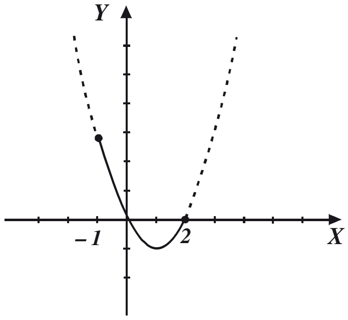
c) $\lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$

Para $x = 2$

a) $f(2) = (2)^2 - 2(2) = 0$

b) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2 - 2x) = 0$

c) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$



$f(x)$ es continua en el intervalo abierto $(-1, 2)$ y es continua a la derecha de -1 y a la izquierda de 2, entonces $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[-1, 2]$

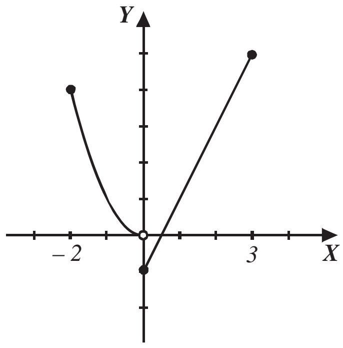
2 ¿La función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ es continua en el intervalo $[-2, 3]$?

Solución

Del intervalo $(-2, 3)$ la función $f(x)$ no es continua en $x = 0$, ya que:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0, \ \lim_{x \to 0^+} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$$



Por tanto, $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe.
Si $f(x)$ no es continua en el intervalo abierto

$$(-2, 3)$$

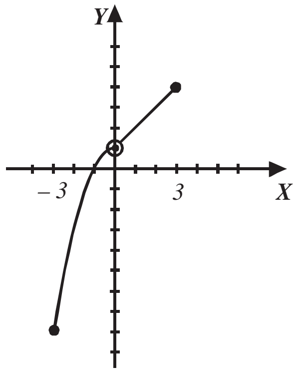
Entonces, no es continua en el intervalo cerrado

$$[-2, 3]$$

3 ¿La función $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ es continua en el intervalo $[-3, 3]$?

Solución

Se prueba la continuidad de la función en $x = 0$



1. $f(0) = 1 - (0)^2 = 1$
2. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 + (0) = 1; \ \lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 - (0)^2 = 1$
3. $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = 1$

La función es continua en el intervalo $(-3, 3)$

Ahora se prueba la continuidad en los extremos:

Para $x = -3$

1. $f(-3) = 1 - (-3)^2 = 1 - 9 = -8$
2. $\lim_{x \to -3^+} f(x) = 1 - (3)^2 = 1 - 9 = -8$
3. $f(-3) = \lim_{x \to -3^+} f(x)$

Para $x = 3$

1. $f(3) = 1 + 3 = 1 + 3 = 4$
2. $\lim_{x \to -3^-} f(x) = 1 + 3 = 1 + 3 = 4$
3. $f(3) = \lim_{x \to -3^-} f(x)$

La función es continua en $(-3, 3)$ y además es continua a la derecha de -3 y a la izquierda de 3, por tanto, es continua en el intervalo $[-3, 3]$

Continuidad en un intervalo semiabierto

Para intervalos semiabiertos $(a, b]$ y $[a, b)$ se tiene que:

1. Una función $f(x)$ es continua en el intervalo semiabierto $(a, b]$ si es continua en el intervalo abierto (a, b), y $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$
2. Una función $f(x)$ es continua en el intervalo semiabierto $[a, b)$ si es continua en el intervalo abierto (a, b), y $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$ es continua en el intervalo semiabierto $(3, 6]$

Demostración

El dominio de la función se define $D_f = \{x \in R \mid x \neq 3\}$, por tanto $f(x)$ es continua en el intervalo abierto $(3, 6)$

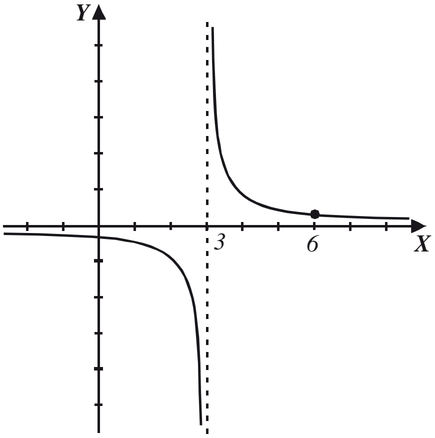
Se verifica la continuidad por la izquierda en 6

a) $f(6) = \dfrac{2}{6-3} = \dfrac{2}{3}$

b) $\lim\limits_{x \to 6^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 6^-}\left(\dfrac{2}{x-3}\right) = \dfrac{2}{3}$

c) $\lim\limits_{x \to 6^-} f(x) = f(6)$

Entonces, $f(x)$ es continua en el intervalo semiabierto $(3, 6]$



2 ¿La función $f(x)=\begin{cases}3 & \text{si } x<2\\ x^2-1 & \text{si } 2\leq x<3\end{cases}$ es continua en el intervalo semiabierto $(-1, 3]$?

Solución

Se verifica la continuidad en $x = 2$

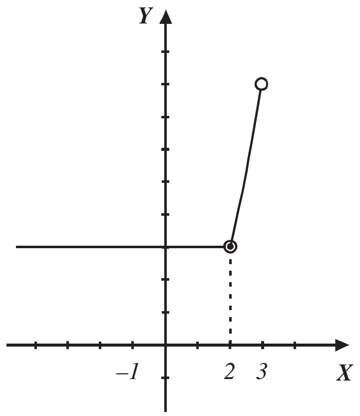
1. $f(2) = (2)^2 - 1 = 3$
2. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3;\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = 3,$

Por tanto, $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$

3. $f(2) = \lim_{x\to 2} f(x)$, la función es continua en $(-1, 3)$

Se prueba la continuidad por la izquierda en $x = 3$

1. $f(3)$ no está definida, por tanto, la función no es continua en el intervalo $(-1, 3]$



3 Verifica la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases}-x & \text{si } -2\leq x\leq 0\\ -x^2+4x & \text{si } 0<x<4\end{cases}$ en $[-2, 4)$

Solución

Se verifica la continuidad en $x = 0$

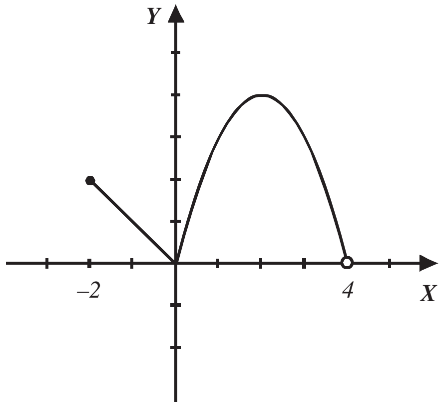
1. $f(0) = -(0) = 0$
2. $\lim_{x\to 0^-} (-x) = 0,\ \lim_{x\to 0^+} (-x^2 + 4x) = 0$
3. Por tanto, $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

La función es continua en el intervalo $(-2, 4)$

Se prueba la continuidad por la derecha para $x = -2$

1. $f(-2) = -(-2) = 2$
2. $\lim_{x\to -2^+} (-x) = -(-2) = 2$
3. $f(-2) = \lim_{x\to -2^+} (-x)$

Por tanto, la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[-2, 4)$



EJERCICIO 26

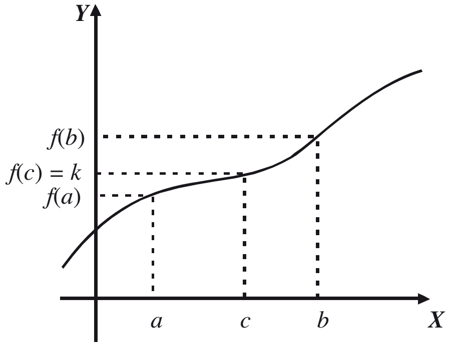
Verifica si son continuas las siguientes funciones en los intervalos indicados:

1. $f(x) = 3x + 2$ en $[0, 3)$
2. $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$ en $(-1, 3)$
3. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ en $[-3, 3]$
4. $f(x) = \frac{1}{x} - 3$ en $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$
5. $f(x) = x^2 - x^3$ en $[-2, 0]$
6. $f(x) = \sqrt{x + 3}$ en $[-3, 1]$
7. $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{si } x < 1 \\ 4x - 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ en $[-2, 4]$
8. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ en $[-3, 4]$
9. $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x < 2 \\ 2x + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ en $(0, 3)$
10. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ -2x + 3 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ -3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ en $(-2, 5)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Teorema del valor intermedio

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$, y k un número comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$.



EJEMPLOS

Ejemplos

1 Si $f(x) = 3x - 2$ es una función definida en el intervalo $[-2, 3]$, obtén el valor de c que cumpla con el teorema del valor intermedio cuando $k = 1$

Solución

Al aplicar el teorema se obtiene:

$$f(c) = k \rightarrow 3c - 2 = 1 \rightarrow 3c = 3 \rightarrow c = 1$$

Por consiguiente, $c = 1$ cuando $k = 1$

2 Dada la función $g(x) = x^2 - 3x - 2$, definida en el intervalo [1, 4], determina el valor de k que cumpla con el teorema del valor intermedio cuando $c = 3$

Solución

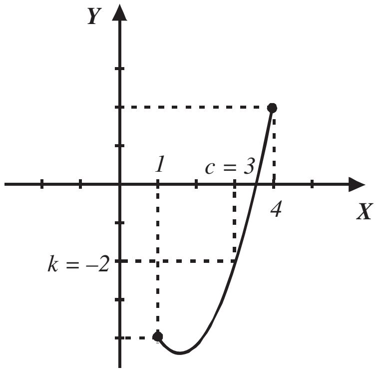
Se aplica el teorema:

$$f(c) = k \rightarrow c^2 - 3c - 2 = k$$

Pero, $c = 3$ y al sustituir se obtiene el valor de k

$$(3)^2 - 3(3) - 2 = k \rightarrow k = -2$$

entonces, $k = -2$



EJERCICIO 27

Aplica el teorema del valor intermedio y encuentra el valor de *c* en los siguientes ejercicios:

1. $f(x) = 3x - 5$; $[-2, 4]$ con $k = 1$
2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$; $[-3, 3]$ con $k = 2$
3. $f(x) = \dfrac{3x - 2}{x + 1}$; $[0, 5]$ con $k = 2$
4. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 1 \\ -2x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$; $[-2, 4]$ con $k = 0$
5. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5 - x} & \text{si } x \leq 5 \\ x^2 - 25 & \text{si } x > 5 \end{cases}$; $[0, 8]$ con $k = 0$

Aplica el teorema del valor intermedio y determina el valor de *k* en los siguientes ejercicios:

6. $f(x) = 3x^3 - 2x^2$; $[-2, 0]$, $c = -1$
7. $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$; $[-6, 0]$, $c = -4$
8. $f(x) = \dfrac{x}{2x + 1}$; $[1, 5]$, $c = 2$
9. $f(x) = \cos x$; $[0, 2\pi]$, $c = \dfrac{\pi}{4}$
10. $f(x) = \log(3 + x)$; $[1, 12]$, $c = 7$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 4

LA DERIVADA

Reseña HISTÓRICA

En un periodo de menos de dos años, cuando Newton tenía menos de 25 años, comenzó con avances revolucionarios en matemática, óptica, física y astronomía.

Mientras Newton estaba en casa (debido a una peste que cerró la Universidad de Cambridge) estableció las bases del cálculo diferencial e integral. El método de las fluxiones, como él lo llamó, estaba basado en su crucial visión de que la integración de una función era el procedimiento inverso de su derivación.

Al considerar a la derivación como la operación básica, Newton produjo sencillos métodos analíticos que unificaban muchas técnicas diferentes desarrolladas previamente para resolver problemas, en apariencia no relacionados, como calcular áreas, tangentes, longitud de curvas y los máximos y mínimos de funciones. El *De Methodis Serierum et Fluxionum* de Newton fue escrito en 1671, pero Newton no pudo publicarlo y no apareció impreso hasta que John Colson produjo una traducción al inglés en 1736.

Sir Isaac Newton
(1643-1727)

Definición

Sea $f(x)$ una función, se define a su derivada $f'(x)$, como:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Para toda x, siempre que el límite exista y se representa por:

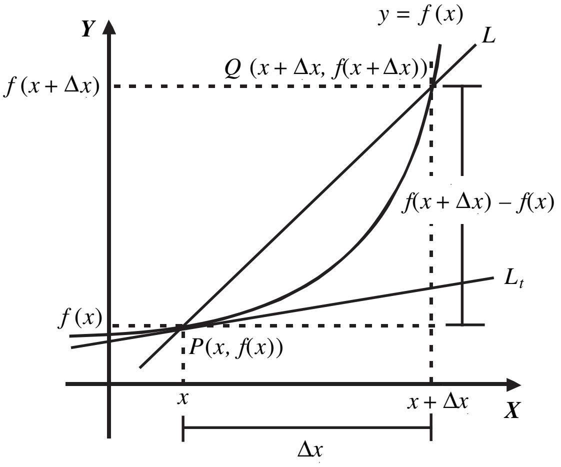
$$y',\ f'(x),\ \frac{dy}{dx} \ \text{ o } \ D_x y$$

Interpretación geométrica

El valor de la derivada en cualquier punto de la curva es igual a la pendiente de la recta tangente en ese punto. Donde:

Δx: incremento en x

Δy: incremento en y



En la gráfica se observa que la pendiente de la recta L es:

$$m_t = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Si Δx tiende a cero, la recta L coincide con L_t, entonces la pendiente de L_t será el límite de m_t.

$$\lim_{\Delta x \to 0} m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Por definición, la derivada es:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Regla de los cuatro pasos

Sea una función $y = f(x)$, entonces:

1. $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$

2. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

3. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ (razón de cambio)

4. $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ (derivada de la función)

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra la derivada de la función $f(x) = 5x - 6$

Solución

Se aplica la regla de los cuatro pasos y se obtiene:

1. $y + \Delta y = 5(x + \Delta x) - 6$

2. $\Delta y = (5x + 5\Delta x - 6) - (5x - 6)$

3. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(5x + 5\Delta x - 6) - (5x - 6)}{\Delta x} = \frac{5x + 5\Delta x - 6 - 5x + 6}{\Delta x} = \frac{5\Delta x}{\Delta x} = 5$

4. $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 5 = 5$ (derivada de la función)

Este resultado se obtiene también cuando se utiliza la definición, como sigue:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[5(x + \Delta x) - 6] - (5x - 6)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5x + 5\Delta x - 6 - 5x + 6}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (5) = 5$$

Por tanto, la derivada de la función $f(x) = 5x - 6$ es: $f'(x) = 5$

2 Aplica la definición y determina la derivada de $y = 7x^2 - 5x + 9$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[7(x + \Delta x)^2 - 5(x + \Delta x) + 9] - (7x^2 - 5x + 9)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{7(x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2) - 5x - 5\Delta x + 9 - 7x^2 + 5x - 9}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{7x^2 + 14x\Delta x + 7\Delta x^2 - 5x - 5\Delta x + 9 - 7x^2 + 5x - 9}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{14x\Delta x + 7\Delta x^2 - 5\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (14x + 7\Delta x - 5) = 14x - 5$$

Por consiguiente, la derivada es:

$$\frac{dy}{dx} = 14x - 5$$

3 Encuentra la derivada de la función $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+5}$, aplica la definición.

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{2(x+\Delta x)-1}{x+\Delta x+5} - \dfrac{2x-1}{x+5}}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{2x+2\Delta x-1}{x+\Delta x+5} - \dfrac{2x-1}{x+5}}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{(x+5)(2x+2\Delta x-1)-(2x-1)(x+\Delta x+5)}{(x+\Delta x+5)(x+5)}}{\Delta x} \quad \text{al simplificar,}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{11\Delta x}{\Delta x(x+\Delta x+5)(x+5)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{11}{(x+\Delta x+5)(x+5)} \quad \text{se resuelve el límite}$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{11}{(x+5)^2}$$

4 ¿Cuál es la derivada de la función $y = \sqrt{x+2}$?

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x+2} - \sqrt{x+2}}{\Delta x} \quad \text{se racionaliza la expresión}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x+2} - \sqrt{x+2}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x+\Delta x+2} + \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+\Delta x+2} + \sqrt{x+2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x+2}\right)^2 - \left(\sqrt{x+2}\right)^2}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x+2} + \sqrt{x+2}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x+2-x-2}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x+2} + \sqrt{x+2}\right)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x+2} + \sqrt{x+2}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+2} + \sqrt{x+2}}$$

De tal manera que, al resolver el límite se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

EJERCICIO 28

Deriva las siguientes funciones, utiliza la definición.

1. $y = 3x + 2$
2. $y = 2a - bx$
3. $y = x^2$
4. $f(x) = 3x^2 - 5x$
5. $y = ax^2 + bx + c$
6. $y = x^3$
7. $y = x^3 - x^2$
8. $y = \dfrac{4x^2 - 16}{x - 2}$
9. $y = \dfrac{2x}{x - 1}$
10. $y = (x - 1)(x^2 + x + 1)$
11. $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$
12. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$
13. $f(x) = \sqrt{x - 2}$
14. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
15. $y = \sqrt[3]{2x + 1}$
16. $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$
17. $y = \sqrt[3]{x}$
18. $y = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x - 1}}$
19. $y = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 3}}$
20. $y = \sqrt[n]{x}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Fórmulas para determinar la derivada de una función algebraica

La forma directa de obtener la derivada de una función algebraica es la aplicación de las siguientes fórmulas:

1. $\dfrac{d}{dx} c = 0$
2. $\dfrac{d}{dx} x = 1$
3. $\dfrac{d}{dx} cv = c\dfrac{dv}{dx}$
4. $\dfrac{d(u + v - w)}{dx} = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx} - \dfrac{dw}{dx}$
5. $\dfrac{d\,(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$
6. $\dfrac{d}{dx} v^n = nv^{n-1}\dfrac{dv}{dx}$
7. $\dfrac{d}{dx} \sqrt[n]{v} = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{v^{n-1}}}\dfrac{dv}{dx}$
8. $\dfrac{d}{dx} \sqrt{v} = \dfrac{1}{2\sqrt{v}}\dfrac{dv}{dx}$
9. $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$
10. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$
11. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{c}{v}\right) = -\dfrac{c}{v^2}\dfrac{dv}{dx}$
12. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{v}{c}\right) = \dfrac{1}{c}\dfrac{dv}{dx}$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es la derivada de la función $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$?

Solución

Al aplicar las fórmulas respectivas se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3+2x^2-4x+5) = \frac{d}{dx}(x^3)+\frac{d}{dx}(2x^2)-\frac{d}{dx}(4x)+\frac{d}{dx}(5)$$
$$= \frac{d}{dx}(x^3)+2\frac{d}{dx}(x^2)-4\frac{d}{dx}(x)+\frac{d}{dx}(5)$$
$$= 3x^2 + 2(2x) - 4(1) = 3x^2 + 4x - 4$$

2 Deriva la función $y = \sqrt[3]{x^2}$

Solución

Aplicamos el hecho de que $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ y posteriormente $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2}\right)=\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

3 Calcula la derivada de la función $s = \frac{1}{\sqrt[5]{t}}$

Solución

$$\frac{ds}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt[5]{t}}\right)=\frac{d}{dt}\left(t^{-\frac{1}{5}}\right) = -\frac{1}{5}t^{-\frac{1}{5}-1} = -\frac{1}{5}t^{-\frac{6}{5}} = -\frac{1}{5t^{\frac{6}{5}}} = -\frac{1}{5\sqrt[5]{t^6}}$$

pero $\sqrt[5]{t^6} = \sqrt[5]{t^5\cdot t} = t\sqrt[5]{t}$, por tanto $\frac{ds}{dt} = -\frac{1}{5t\sqrt[5]{t}}$

4 Obtén la derivada de la función $y = \frac{4}{x}$

Solución

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{x}\right)=\frac{d}{dx}(4x^{-1}) = 4\frac{d}{dx}(x^{-1}) = 4(-1x^{-1-1}) = -4x^{-2} = -\frac{4}{x^2}$$

5 Determina la derivada de la función $y = 2\sqrt[3]{x}-\frac{7}{\sqrt{x}}$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(2x^{\frac{1}{3}}-7x^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{d}{dx}\left(2x^{\frac{1}{3}}\right)-\frac{d}{dx}\left(7x^{-\frac{1}{2}}\right) = 2\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{3}}\right)-7\frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$$
$$= 2\left(\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}\right)-7\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}\right) = \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}+\frac{7}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{7}{2x\sqrt{x}}$$

6 ¿Cuál es la derivada de la función $y = (3x^2 - x)^7$?

Solución

Se aplica la fórmula $\frac{d(v^n)}{dx} = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$ y se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = 7(3x^2 - x)^6 \cdot \frac{d}{dx}(3x^2 - x) = 7(3x^2 - x)^6 \cdot \left(\frac{d3x^2}{dx} - \frac{dx}{dx}\right) = 7(3x^2 - x)^6(6x - 1)$$

$$= (42x - 7)(3x^2 - x)^6$$

7 Encuentra la derivada de la función $s = \sqrt[3]{8 + 4t - t^3}$

Solución

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(8 + 4t - t^3)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}(8 + 4t - t^3)^{\frac{1}{3}-1} \cdot \frac{d}{dt}(8 + 4t - t^3) = \frac{1}{3}(8 + 4t - t^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (4 - 3t^2)$$

$$= \frac{4 - 3t^2}{3(8 + 4t - t^3)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{4 - 3t^2}{3\sqrt[3]{(8 + 4t - t^3)^2}}$$

8 Deriva la función $y = -\frac{5}{\left(\sqrt{x} - x\right)^3}$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[-\frac{5}{\left(\sqrt{x} - x\right)^3}\right] = \frac{d}{dx}\left[-5\left(\sqrt{x} - x\right)^{-3}\right] = -5\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x} - x\right)^{-3}$$

$$= -5\left[-3\left(\sqrt{x} - x\right)^{-4} \cdot \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x} - x\right)\right]$$

$$= 15\left(\sqrt{x} - x\right)^{-4} \cdot \left(\frac{d}{dx}\sqrt{x} - \frac{d}{dx}x\right)$$

$$= \frac{15}{\left(\sqrt{x} - x\right)^4}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1\right)$$

$$= \frac{15}{\left(\sqrt{x} - x\right)^4}\left(\frac{1 - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{15\left(1 - 2\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - x\right)^4}$$

9 Calcula la derivada de la función $y = x\sqrt{x+1}$

Solución

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x\sqrt{x+1}\right) = x\frac{d}{dx}\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}\,\frac{dx}{dx} = x\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right) + \sqrt{x+1} = \frac{x}{2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1}$$

$$= \frac{x+2(x+1)}{2\sqrt{x+1}} = \frac{x+2x+2}{2\sqrt{x+1}} = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$$

Por consiguiente, $\frac{dy}{dx} = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$

10 Obtén la derivada de la función $f(x) = \frac{x^2-5}{1-3x^2}$

Solución

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$ y se obtiene:

$$f'(x) = \frac{(1-3x^2)(2x)-(x^2-5)(-6x)}{(1-3x^2)^2} = \frac{2x-6x^3+6x^3-30x}{(1-3x^2)^2} = -\frac{28x}{(1-3x^2)^2}$$

EJERCICIO **29**

Deriva las siguientes funciones:

1. $y = -10$
2. y = 5
3. $f(x) = a^2$
4. $s(t) = b^2$
5. $y = 6x$
6. $y = \frac{3}{4}x$
7. $f(x) = ax$
8. $s(t) = b^2t$
9. $f(x) = 5x\sqrt{2}$
10. $y = ax\sqrt{b}$
11. $f(x) = x^5$
12. $f(x) = 4x^3$
13. $s(t) = \frac{1}{5}t^4$
14. $y = x^{\frac{9}{2}}$
15. $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$
16. $y = 6x^{\frac{3}{2}}$
17. $f(x) = x^{\frac{2}{5}}$
18. $f(x) = 4x^{\frac{1}{4}}$
19. $f(x) = \sqrt{x}$
20. $s(t) = \sqrt[4]{t}$
21. $f(x) = 5\sqrt[5]{x}$
22. $f(x) = \frac{x^5}{7}$

23. $f(x) = \frac{x^4}{9}$

24. $s(t) = \frac{t^3}{a}$

25. $f(x) = \frac{5}{x^4}$

26. $f(x) = \frac{2}{x^6}$

27. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$

28. $s(t) = \frac{\sqrt[3]{t}}{5}$

29. $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$

30. $s(t) = \frac{5}{\sqrt[4]{t}}$

31. $f(x) = \frac{4}{\sqrt[3]{x}}$

32. $f(x) = 7x^3 - 3x^2 + 3x - 12$

33. $f(x) = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - x - 6$

34. $f(x) = 5x^2 + 4x + 4mn - 2$

35. $f(x) = 3ax^4 - 4ax^3 - 5bx^2 + 7cx$

36. $f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{5} - \frac{4x}{9} - \frac{1}{5}$

37. $s(t) = \frac{t^5}{6} - \frac{t^4}{5} + \frac{t^3}{4} - \frac{t^2}{7} + \frac{t}{9} - \frac{2}{3}$

38. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{x}{a} + \frac{c}{b}$

39. $s(t) = \frac{4}{t^2} - \frac{5}{t} - \frac{9}{5}$

40. $f(x) = \frac{5}{x^4} - \frac{6}{x^3} - \frac{7}{x^2} - \frac{3}{x} + \frac{1}{5}$

41. $s(t) = \frac{t^3}{5} - \frac{2}{t^2} + \frac{6}{t} - \frac{3}{5}$

42. $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{5} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$

43. $f(x) = \frac{x^4 - 3x^3 - 6x^2 - 3x + 2}{x}$

44. $f(x) = 2x^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{3}{2}}$

45. $f(x) = 8\sqrt{x} + 9\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[2]{x^3}$

46. $f(x) = ax^n + bx^{n-1}$

47. $f(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{5x}{7} - \frac{8}{5}$

48. $f(x) = a\sqrt[n]{x} + b\sqrt[3]{x}$

49. $y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{\sqrt[4]{x^5}}{3}$

50. $f(x) = \frac{2}{\sqrt[4]{x^5}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^{-1}}$

51. $f(x) = \frac{7}{x^{-2}} + \frac{5}{x^{-3}}$

52. $f(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x} - 2x$

53. $f(x) = \frac{3x^2 + 5x + 8}{\sqrt[3]{x}}$

54. $y = \sqrt{x^{-1}}\left(\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)$

55. $y = (3x - 4)^5$

56. $y = (2 - 4x)^3$

57. $y = (3x^6 - 2x^4)^4$

58. $y = \left(4x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}\right)^3$

59. $y = \sqrt{5 - 3x^2}$

60. $y = \sqrt[3]{x^3 + 2}$

61. $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{-1}$

62. $y = \frac{2}{3}\sqrt{2x^2 + 6x}$

63. $y = \left(\frac{x}{3} + 6\sqrt{x}\right)^3$

64. $f(x) = \sqrt[4]{x^4 - 2}$

65. $f(x) = (x^2 + 5x - 3)^3$

66. $y = \sqrt[3]{(2x-3)^2}$

67. $y = \sqrt{\sqrt{4x+3}}$

68. $f(x) = \left(\frac{1}{3}x + 2\right)^3$

69. $y = \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

70. $f(z) = \sqrt{z^2 - 4}$

71. $y = \sqrt[3]{x^6 + 3x}$

72. $y = \left(4x^2 - \frac{1}{2}x\right)(9x + 8)$

73. $y = (5x-3)\left(4x - \frac{3}{x}\right)$

74. $y = x^3(3x+1)$

75. $f(x) = x\sqrt{2x+1}$

76. $y = \frac{x}{3}(2x+1)^3$

77. $y = x^2\sqrt{x-1}$

78. $f(x) = (3x^2 - 5)^4(2x^2 + 1)^3$

79. $f(\theta) = (\theta^2 + 1)^3(\theta^3 - 2)^2$

80. $s = \frac{\sqrt{4-3t}}{t^{-1}}$

81. $s(t) = t^3\left(\frac{2}{t} - \frac{3}{t^2}\right)^2$

82. $f(x) = \frac{6}{2-4x}$

83. $f(t) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - t^2}$

84. $f(r) = \frac{r^2 - 3}{\sqrt{r^2 - 4}}$

85. $f(t) = \frac{6t-3}{5t+8}$

86. $f(z) = \frac{6-3z}{5-6z}$

87. $f(x) = \frac{ax + b}{ax - b}$

88. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{3x}}{3}$

89. $f(t) = \sqrt{\frac{1-2t}{1+2t}}$

90. $f(w) = \left(\frac{w-3}{w+2}\right)^2$

91. $f(\theta) = \frac{6(2-\theta^3)}{3-2\theta}$

92. $f(s) = \frac{s^2 - 2}{s^2 - 6s}$

93. $f(x) = \frac{5x^2}{2\sqrt{b^2 + x^2}}$

94. $f(t) = \frac{(9t-6)^3}{(27-3t)^2}$

95. $f(x) = \frac{4xb}{2a - 6x}$

96. $f(x) = 2x\sqrt{4 - x^2}$

97. $y = \frac{2}{\sqrt{x^4 - a^4}}$

98. $y = \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2 + 3}}$

99. $y = (2x+3)\sqrt{x^2 + 3x}$

100. $y = \frac{x\sqrt{x+1}}{x+1}$

101. $y = \dfrac{x^2 - 9}{\sqrt{x-3}}$

102. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^3+1}{x^3-1}}$

103. $y = \dfrac{\sqrt{x^n+1}}{\sqrt{x^n-1}}$

104. $y = \dfrac{\sqrt[m]{x^n}}{\sqrt[m]{x^n}-1}$

105. $y = \dfrac{x\sqrt{2x+1}}{\sqrt{4-5x}}$

106. $y = 2x\sqrt[3]{\dfrac{2x^3+1}{2x^3-1}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Regla de la cadena

Sea $y = g(u)$, $u = f(x)$, entonces la derivada de $y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$, se define:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(g \circ f)(x) = \frac{d}{dx}g(f(x)) = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = u^2 - 9;\ u = x^2 + 1$

Solución

Por definición $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$, entonces $\dfrac{dy}{du} = 2u$ y $\dfrac{du}{dx} = 2x$, por tanto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = (2u)(2x) = 4ux = 4(x^2+1)x = 4x(x^2+1)$$

2 Obtén $\dfrac{d}{dx}(y \circ u \circ v)$, si $y = u^3$, $u = \dfrac{v-1}{v+1}$, $v = \sqrt{x^2-1}$

Solución

Cuando hay más de dos funciones, la derivada es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$

Luego:

$$\frac{dy}{du} = 3u^2,\ \frac{du}{dv} = \frac{2}{(v+1)^2} \ \text{ y } \ \frac{dv}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

Por consiguiente, el resultado es:

$$\frac{d}{dx}(y \circ u \circ v) = \left[3u^2\right]\left[\frac{2}{(v+1)^2}\right]\left[\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right] = \frac{6u^2x}{(v+1)^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{6\left(\sqrt{x^2-1}-1\right)^2 x}{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)^4\sqrt{x^2-1}}$$

3 Deriva la función $y=\sqrt[3]{x^3-2x^2+8}$, utilizando la regla de la cadena.

Solución

Al tomar $u=x^3-2x^2+8$, entonces $y=\sqrt[3]{u}$, luego:

$$\frac{dy}{du}=\frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}} \quad \text{y} \quad \frac{du}{dx}=3x^2-4x$$

Al utilizar la regla de la cadena, se obtiene como resultado:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\left[\frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}\right]\left[3x^2-4x\right]=\frac{3x^2-4x}{3\sqrt[3]{u^2}}=\frac{3x^2-4x}{3\sqrt[3]{(x^3-2x^2+8)^2}}$$

EJERCICIO 30

Determina $\frac{dy}{dx}$, para las siguientes funciones:

1. $y = u^2 - u,\ u = \frac{1}{x}$
2. $y = \sqrt{\frac{u-1}{u+1}},\ u = \sqrt{x}$
3. $y = \sqrt{2u^3-3u},\ u = x^2 - 1$
4. $y = \frac{3}{u^3}-\frac{2}{u^2},\ u = x + 1$
5. $y = \frac{u}{u^2-1},\ u = x^3 - 6x^2 - 8x$
6. $y = \sqrt{(2x-1)^5+(2x-1)^3}$
7. $y = \sqrt{\frac{x^3-1}{x^3+1}}$
8. $y = \frac{u+1}{u-1},\ u = \frac{v+2}{v-2},\ v = \sqrt{x^2-1}$
9. $y = \sqrt{u-1},\ u = \frac{v^2}{v^2-1},\ v = \sqrt{x}$
10. $y = \frac{1}{\sqrt{u}},\ u = \sqrt{\frac{v-1}{v+1}},\ v = (x^2 + 3)^2$
11. $y = u^2 + 1,\ u = \sqrt{v},\ v = \frac{x+1}{x-1}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Derivadas de funciones trascendentes

Se clasifican en funciones trigonométricas directas e inversas, logarítmicas y exponenciales, por ejemplo:

$y = \text{sen } 3\sqrt{x}$

$y = \ln\sqrt{2x-1}$

$y = e^{\cos x}$

$y = \tan(e^x - \ln x)$

$y = 3^{x-x2}$

$y = \text{arc sen}(x - 2)$

Trigonométricas

$$\frac{d}{dx}\text{sen } v=\cos v\,\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\cos v=-\text{sen } v\,\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\tan v=\sec^2 v\,\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\cot v=-\csc^2 v\,\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\sec v=\sec v\tan v\,\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\csc v=-\csc v\cot v\,\frac{dv}{dx}$$

Inversas trigonométricas

$$\frac{d}{dx}\text{arc sen } v = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\cdot\frac{dv}{dx} \qquad \frac{d}{dx}\text{arc cot } v = -\frac{1}{1+v^2}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\text{arc cos } v = -\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\cdot\frac{dv}{dx} \qquad \frac{d}{dx}\text{arc sec } v = \frac{1}{v\sqrt{v^2-1}}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\text{arc tan } v = \frac{1}{1+v^2}\cdot\frac{dv}{dx} \qquad \frac{d}{dx}\text{arc csc } v = -\frac{1}{v\sqrt{v^2-1}}\cdot\frac{dv}{dx}$$

Logarítmicas

$$\frac{d}{dx}\ln v = \frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dx} \qquad \frac{d}{dx}\log_b v = \frac{\log_b e}{v}\cdot\frac{dv}{dx}$$

Exponenciales

$$\frac{d}{dx}e^v = e^v\cdot\frac{dv}{dx} \qquad \frac{d}{dx}a^v = a^v\ln a\cdot\frac{dv}{dx} \qquad \frac{d}{dx}u^v = v\cdot u^{v-1}\frac{du}{dx} + \ln u\cdot u^v\frac{dv}{dx}$$

Derivadas de funciones trigonométricas

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la derivada de las siguientes funciones:

$$y = \text{sen } 5x^2,\ y = \tan 6x,\ y = \csc 4x^3$$

Solución

Se aplican las fórmulas $\frac{d}{dx}\text{sen } v = \cos v\frac{dv}{dx}$, $\frac{d}{dx}\tan v = \sec^2 v\frac{dv}{dx}$, $\frac{d}{dx}\csc v = -\csc v \cot v\frac{dv}{dx}$ a cada una de las funciones:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\text{sen } 5x^2 = \cos 5x^2\left(\frac{d}{dx}5x^2\right) = \cos 5x^2(10x) = 10x\cos 5x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\tan 6x = \sec^2 6x\left(\frac{d}{dx}6x\right)\sec^2 6x(6) = 6\sec^2 6x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\csc 4x^3 = -\csc 4x^3\cot 4x^3\left(\frac{d}{dx}4x^3\right) = -\csc 4x^3\cot 4x^3(12x^2) = -12x^2\csc 4x^3\cot 4x^3$$

2 Deriva la función $y = 4\cos(x^2-1)$

Solución

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}\cos v = -\text{sen } v\frac{dv}{dx}$, con $v = x^2 - 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}4\cos(x^2-1) = 4\frac{d\cos(x^2-1)}{dx} = 4\left[-\text{sen}(x^2-1)\frac{d(x^2-1)}{dx}\right] = -4\,\text{sen}(x^2-1)\cdot 2x$$

por tanto, $\frac{dy}{dx} = -8x\cdot\text{sen}(x^2-1)$

3 Encuentra la derivada de la función $y = \dfrac{\text{sen } x - \cos x}{\text{sen } x + \cos x}$

Solución

Primero se aplica la fórmula del cociente de funciones:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\text{sen } x + \cos x)\dfrac{d(\text{sen } x - \cos x)}{dx} - (\text{sen } x - \cos x)\dfrac{d(\text{sen } x + \cos x)}{dx}}{(\text{sen } x + \cos x)^2}$$

Se derivan las funciones con las fórmulas para la función seno y coseno:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\text{sen } x + \cos x)\left[\dfrac{d\,\text{sen } x}{dx} - \dfrac{d\cos x}{dx}\right] - (\text{sen } x - \cos x)\left[\dfrac{d\,\text{sen } x}{dx} + \dfrac{d\cos x}{dx}\right]}{(\text{sen } x + \cos x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\text{sen } x + \cos x)(\cos x + \text{sen } x) - (\text{sen } x - \cos x)(\cos x - \text{sen } x)}{(\text{sen } x + \cos x)^2} = \frac{(\text{sen } x + \cos x)^2 + (\cos x - \text{sen } x)^2}{(\text{sen } x + \cos x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{sen}^2 x + 2\,\text{sen } x\cos x + \cos^2 x + \cos^2 x - 2\,\text{sen } x\cos x + \text{sen}^2 x}{(\text{sen } x + \cos x)^2} = \frac{2(\text{sen}^2 x + \cos^2 x)}{(\text{sen } x + \cos x)^2}$$

Se aplica la identidad trigonométrica $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ y se obtiene como resultado:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(\text{sen } x + \cos x)^2}$$

4 Determina la derivada de la función $r = \tan^3\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)$

Solución

Se expresa $\tan^3\left(\sqrt{\theta} - \theta\right) = \left[\tan\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)\right]^3$ y se aplica la fórmula $\dfrac{d}{dx}v^n = nv^{n-1}\dfrac{dv}{dx}$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{d\tan^3\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)}{d\theta} = \frac{d\left[\tan\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)\right]^3}{d\theta} = 3\left[\tan\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)\right]^2 \cdot \frac{d\tan\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)}{d\theta}$$

Se deriva la tangente con la fórmula $\dfrac{d}{dx}\tan v = \sec^2 v\dfrac{dv}{dx}$ y se simplifican los resultados:

$$\frac{dr}{d\theta} = 3\tan^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right) \cdot \sec^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right) \cdot \frac{d\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)}{d\theta}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = 3\tan^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right) \cdot \sec^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{\theta}} - 1\right) = 3\tan^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right) \cdot \sec^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)\left(\frac{1 - 2\sqrt{\theta}}{2\sqrt{\theta}}\right)$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \left(\frac{3 - 6\sqrt{\theta}}{2\sqrt{\theta}}\right) \cdot \tan^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right) \cdot \sec^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)$$

5 Deriva la función $s = \cos 2t \cdot \text{sen } 4t$

Solución

Se aplica la fórmula para derivar un producto $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d(\cos 2t \text{ sen } 4t)}{dt} = \cos 2t \cdot \frac{d \text{ sen } 4t}{dt} + \text{sen } 4t \cdot \frac{d\cos 2t}{dt}$$

Se deriva el seno y coseno con sus respectivas fórmulas y se obtiene el resultado:

$$\frac{ds}{dt} = \cos 2t \cdot \left[\cos 4t \frac{d(4t)}{dt}\right] + \text{sen } 4t \cdot \left[-\text{sen } 2t \frac{d(2t)}{dt}\right] = \cos 2t\ [4\cos 4t] + \text{sen } 4t\ [-2 \text{ sen } 2t]$$

$$\frac{ds}{dt} = 4 \cos 2t \cos 4t - 2 \text{ sen } 2t \text{ sen } 4t$$

6 ¿Cuál es la derivada de la función $y = \frac{1}{\sqrt{\text{sen } x}}$?

Solución

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{\text{sen } x}} = \frac{\sqrt{\text{sen } x}\frac{d(1)}{dx} - 1\frac{d\sqrt{\text{sen } x}}{dx}}{\left(\sqrt{\text{sen } x}\right)^2}$$

Se realizan las respectivas derivadas:

$$\frac{d(1)}{dx} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d\sqrt{\text{sen } x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\text{sen } x}}\frac{d \text{ sen } x}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\text{sen } x}}(\cos x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\text{sen } x}}$$

Se sustituyen y se obtiene como resultado:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{\text{sen } x}\,(0) - 1\left(\frac{\cos x}{2\sqrt{\text{sen } x}}\right)}{\text{sen } x} = \frac{\frac{-\cos x}{2\sqrt{\text{sen } x}}}{\frac{\text{sen } x}{1}} = -\frac{\cos x}{2 \text{ sen } x\sqrt{\text{sen } x}}$$

EJERCICIO 31

Deriva las siguientes funciones trigonométricas:

1. $y = \text{sen } 8x$
2. $f(x) = \cos 3x^2$
3. $f(x) = \tan x^3$
4. $s(t) = \sec 6t$
5. $f(x) = \cot 4x^3$
6. $f(x) = \csc 9x$
7. $f(x) = \cos ax$
8. $s(t) = \tan bt^2$

9. $f(x) = 6 \sec x^2$

10. $f(x) = \frac{1}{2} \csc \frac{x}{4}$

11. $f(x) = a \cos 3x$

12. $f(x) = \cot(3x - 5)$

13. $f(x) = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}$

14. $f(x) = \cos\left(5x - \frac{\pi}{2}\right)$

15. $s(t) = \tan(at + \pi)$

16. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

17. $s(t) = \operatorname{sen} \sqrt{t}$

18. $f(x) = \cot \sqrt[3]{x}$

19. $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

20. $s(t) = \cos \frac{1}{t^3}$

21. $f(x) = \sec \frac{1}{\sqrt{x}}$

22. $f(x) = \tan 3x - 3x$

23. $f(x) = ax + \cot ax$

24. $f(x) = \operatorname{sen}(x - 1)^2$

25. $s(t) = \cos(3t^2 + 2)^3$

26. $f(x) = 4 \cot \sqrt{x-1}$

27. $f(x) = \tan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

28. $f(x) = \sec\left(\frac{ax+b}{ax-b}\right)$

29. $f(x) = \operatorname{sen}^2 5x$

30. $f(x) = \cos^3 bx$

31. $f(x) = \tan^4 3x^2$

32. $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} 4x}$

33. $f(x) = \sqrt{\sec 5x^2}$

34. $f(x) = \sqrt[3]{3 \tan x^2}$

35. $f(x) = x \operatorname{sen} x$

36. $f(x) = x^2 \cos x^2$

37. $f(x) = \frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$

38. $f(t) = \frac{\cos 5t^2}{t^2}$

39. $y = \operatorname{sen}(ax^2)$

40. $y = a \cos (3x)$

41. $y = \tan \sqrt{x}$

42. $y = \frac{1}{6} \sec 3x^2$

43. $y = \frac{1}{2} \csc \frac{2x}{3}$

44. $y = x^2 + 3x - \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

45. $y = -3\cot (1 - x^2)$

46. $y = \frac{2}{3} \operatorname{sen}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

47. $y = \operatorname{sen}^2(2\, bx)$

48. $y = \tan^4(2x - 1)^3$

49. $y = \sqrt{\sec 2x}$

50. $y = \sqrt[3]{3 \tan x^2}$

51. $y = x \cdot \cos^3 4x$

52. $y = \frac{x^2}{\operatorname{sen} ax}$

53. $y = x\sqrt{\csc 2x}$

54. $y = \dfrac{\cos(mx)}{\operatorname{sen}(nx)}$

55. $y = \dfrac{1}{1+\operatorname{sen} x}$

56. $y = x\cos x - \operatorname{sen} x$

57. $y = \sqrt{\dfrac{\tan x - 1}{\tan x + 1}}$

58. $y = x^2 \operatorname{sen} 2x - 4x\cos 2x - \operatorname{sen} 2x$

59. $y = \cos(2x-1)\cdot\tan(1-2x)$

60. $y = x^2\sec(\pi - x)$

61. $y = \left(\dfrac{3x\operatorname{sen} x}{3x+1}\right)^3$

62. $y = \cos\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

63. $y = \dfrac{1+\tan^2 x}{x\sec x}$

64. $y = \dfrac{x(1+\operatorname{sen} x)(1-\operatorname{sen} x)}{\cos x}$

65. $y = 2\operatorname{sen} x\cos x$

66. $y = \dfrac{\csc x\cdot\tan x}{\cos x}$

67. $y = \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$

68. $y = \cos^2(3x+1) - \operatorname{sen}^2(3x+1)$

69. $y = \dfrac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}}{x^2}$

70. $y = \dfrac{(1+\tan x)^2}{\sec x}$

71. $y = \dfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen} x + 1$

72. $y = 2\cos x + 2x\operatorname{sen} x - x^2\cos x$

73. $y = \dfrac{3}{8}x - \dfrac{1}{8}\operatorname{sen} 4x + \dfrac{1}{64}\operatorname{sen} 8x$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Derivadas de funciones inversas trigonométricas

EJEMPLOS

1 Deriva la función $y = \operatorname{arc\,sen} x^2$

Solución

Se aplica la fórmula $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{arc\,sen} v) = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}\cdot\dfrac{dv}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,sen} x^2) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\cdot\frac{d(x^2)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}(2x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

Por consiguiente, la derivada de la función es $y' = \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

2 ¿Cuál es la derivada de la función $y = \text{arc tan}\left(\sqrt{x}-1\right)$?

Solución

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}(\text{arc}\tan v)=\frac{1}{v^2+1}\cdot\frac{dv}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\text{arc tan}\left(\sqrt{x}-1\right)=\frac{1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2+1}\cdot\frac{d\left(\sqrt{x}-1\right)}{dx}=\frac{1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}\left[\left(\sqrt{x}-1\right)^2+1\right]}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}\left[x-2\sqrt{x}+2\right]}$$

3 Obtén la derivada de la función $r = \theta^2 \text{ arc sec } \theta$

Solución

$$\frac{dr}{d\theta}=\theta^2\frac{d}{d\theta}\text{arc sec }\theta+\text{arc sec }\theta\frac{d\theta^2}{d\theta}=\theta^2\left[\frac{1}{\theta\sqrt{\theta^2-1}}\frac{d\theta}{d\theta}\right]+\text{arc sec }\theta(2\theta)$$

$$=\frac{\theta}{\sqrt{\theta^2-1}}+2\theta\,\text{arc sec}\,\theta$$

4 Determina la derivada de la función $y = \frac{\text{arc sen } x}{x}$

Solución

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x\frac{d}{dx}(\text{arc sen}\,x)-(\text{arc sen}\,x)\frac{dx}{dx}}{x^2}=\frac{x\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dx}{dx}\right)-\text{arc sen}\,x}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\text{arc sen}\,x}{x^2}=\frac{x}{x^2\sqrt{1-x^2}}-\frac{\text{arc sen}\,x}{x^2}=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}-\frac{\text{arc sen}\,x}{x^2}$$

EJERCICIO 32

Determina la derivada de las siguientes funciones:

1. $y = \text{arc sen } 5x$
2. $f(x) = \text{arc cos } 4x^2$
3. $f(x) = \text{arc tan } 3x$
4. $y = \text{arc cot } x^3$
5. $f(x) = \text{arc sec } x^2$
6. $f(x) = \text{arc csc } 3x^2$
7. $f(x) = \text{arc cos } \frac{x}{b}$
8. $f(x) = \text{arc sen } \frac{x}{4}$

9. $f(x) = \text{arc tan } \frac{x}{a}$

10. $f(x) = 2 \text{ arc sec } \sqrt{x}$

11. $y = \text{arc sen}(3 - x^2)$

12. $y = \text{arc cos}\sqrt{1-x^2}$

13. $y = x^2 \text{ arc tan } x$

14. $y = x \text{ arc sen } x + \sqrt{1-x^2}$

15. $y = 8 \text{ arc cot}\left(\frac{\sqrt{16-x^2}}{x}\right) - \frac{x\sqrt{16-x^2}}{2}$

16. $y = x \text{ arc csc}(x^{-1}) + \text{arc tan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

17. $y = \left(\frac{x^2+1}{2}\right) \text{arc tan } x - \frac{x}{2}$

18. $\varphi = \text{arc csc}\sqrt{\theta^2 - 1}$

19. $y = \frac{x}{2}\sqrt{1-4x^2} + \frac{1}{4}\text{arc sen } 2x$

20. $y = \frac{x^3}{3}\text{arc sen } x + \left(\frac{x^2+2}{9}\right)\sqrt{1-x^2}$

21. $f(r) = \sqrt{b^2 - r^2} + b \cdot \text{arc sen}\frac{r}{b}$

22. $y = x - \text{arc tan } x$

23. $y = \text{arc tan }(2x) + \text{arc sen}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

24. $y = \text{arc sen } \sqrt{x}$

25. $y = x \text{ arc cos}\left(\frac{1}{x}\right)$

26. $y = \text{arc sen}(4ax - 4x^2)$

27. $f(r) = \text{arc sen}(r - 2)$

28. $y = \frac{1}{4}\text{arc tan }\left(\frac{2x+1}{2}\right)$

29. $y = 4 \text{ arc sen }\left(\frac{x-2}{2}\right) - \sqrt{4x - x^2}$

30. $y = 6 \text{ arc csc}\left(\frac{2}{x-2}\right) - \frac{(x+6)\sqrt{4x-x^2}}{2}$

31. $y = \frac{x-1}{2}\sqrt{2x-x^2} + \frac{1}{2}\text{ arc sen }(x-1)$

32. $s(t) = 3\sqrt{9-t^2} + 2 \text{ arc sen }\frac{t}{3}$

33. $6y = 25 \text{ arc sen }\frac{3x}{5} + 3x\sqrt{25 - 9x^2}$

34. $w = 2\sqrt{\theta+2} + \sqrt{2}\text{ arc tan}\sqrt{\frac{\theta+2}{2}}$

35. $y = \frac{2}{3}\text{arc tan}\left(\frac{1}{3}\tan\frac{x}{2}\right)$

36. $y = -\frac{x}{3} + \frac{5}{6}\text{arc tan}\left(2\tan\frac{x}{2}\right)$

37. $y = \text{arc sen}\left(\cos\frac{x}{3}\right)$

38. $y = x \text{ arc cot}(\tan x)$

39. $y = \frac{\text{arc sec }(2x)}{\sqrt{4x^2-1}}$

40. $y = \text{arc sec}\left(2\sec\frac{x}{2}\right)$

41. $y = 4 \text{ arc sen}\left(\frac{2x-4}{3x+2}\right)$

42. $s = t^2 \text{ arc cos}(1 - t) + 2t$

43. $y = \text{arc cos}(a + x)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Derivadas de funciones logarítmicas y exponenciales

A continuación se enlistan las propiedades de los logaritmos, las cuales, al aplicarlas, simplifican la función al momento de obtener su derivada.

1. $\log_a AB = \log_a A + \log_a B$
2. $\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$
3. $\log_a A^n = n \cdot \log_a A$
4. $\log_a \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n}\log_a A$
5. $\log^n{}_a A = (\log_a A)^n$

Las propiedades anteriores también se aplican a los logaritmos naturales.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra la derivada de la función $y = \ln x^2$

Solución

Al aplicar la fórmula $\frac{d \ln v}{dx} = \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}$, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \ln x^2}{dx} = \frac{1}{x^2}\frac{dx^2}{dx} = \frac{1}{x^2}(2x) = \frac{2}{x}$$

Por consiguiente, la derivada de la función es $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}$

2 ¿Cuál es la derivada de $y = \ln^2(x^2 - x)$?

Solución

Se expresa la función como: $\ln^2(x^2 - x) = [\ln(x^2 - x)]^2$ y se aplica $\frac{d}{dx}v^n = nv^{n-1}\left(\frac{d}{dx}v\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[\ln(x^2 - x)]^2 = 2\ln(x^2 - x)\frac{d\ln(x^2 - x)}{dx} = 2\ln(x^2 - x)\cdot\frac{1}{x^2 - x}\frac{d(x^2 - x)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\ln(x^2 - x)\frac{1}{x^2 - x}\cdot(2x - 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\ln(x^2 - x)\frac{2x - 1}{x^2 - x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(2x - 1)\cdot\ln(x^2 - x)}{x^2 - x} = \frac{4x - 2}{x^2 - x}\cdot\ln(x^2 - x)$$

3 Obtén la derivada de $y = x^2 \ln(mx)^2$

Solución

Se utiliza la fórmula del producto $\frac{duv}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 \ln(mx)^2) = x^2 \frac{d}{dx}\ln(mx)^2 + \ln(mx)^2 \frac{d}{dx}x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot \frac{1}{(mx)^2}\frac{d}{dx}(mx)^2 + \ln(mx)^2 \cdot (2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot \frac{1}{(mx)^2} \cdot 2(mx)m + 2x\ \ln(mx)^2 = 2x + 2x\ln(mx)^2$$

Utilizando $\log_a A^n = n \log_a A$, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 2x(2\ln(mx)) = 2x + 4x\ln(mx) = 2x[1 + 2\ln(mx)]$$

4 Determina la derivada de la función $y = \ln(\text{sen } x)$

Solución

Se deriva la función y mediante identidades trigonométricas se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\ln(\text{sen } x) = \frac{1}{\text{sen } x}\cdot\frac{d}{dx}(\text{sen } x) = \frac{1}{\text{sen } x}\cdot\cos x = \frac{\cos x}{\text{sen } x} = \cot x$$

5 Deriva $y = \ln\left(\frac{1+\text{sen } x}{1-\text{sen } x}\right)$

Solución

Al aplicar las propiedades de los logaritmos se obtiene: $y = \ln(1 + \text{sen } x) - \ln(1 - \text{sen } x)$
Se deriva la función:

$$y' = \frac{d}{dx}\ln(1+\text{sen } x) - \frac{d}{dx}\ln(1-\text{sen } x) = \left(\frac{1}{1+\text{sen } x}\right)\frac{d}{dx}(1+\text{sen } x) - \left(\frac{1}{1-\text{sen } x}\right)\frac{d}{dx}(1-\text{sen } x)$$

$$y' = \left(\frac{1}{1+\text{sen } x}\right)(\cos x) - \left(\frac{1}{1-\text{sen } x}\right)(-\cos x) = \frac{\cos x}{1+\text{sen } x} + \frac{\cos x}{1-\text{sen } x}$$

$$y' = \frac{\cos x\,(1+\text{sen } x) + \cos x(1-\text{sen } x)}{(1+\text{sen } x)(1-\text{sen } x)} = \frac{\cos x + \cos x\,\text{sen } x + \cos x - \cos x\,\text{sen } x}{(1+\text{sen } x)(1-\text{sen } x)}$$

$$y' = \frac{2\cos x}{1-\text{sen}^2 x} = \frac{2\cos x}{\cos^2 x} = \frac{2}{\cos x} = 2\left(\frac{1}{\cos x}\right) = 2\sec x$$

6 ¿Cuál es la derivada de la función $y = e^{2x-1}$?

Solución

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}e^v = e^v\frac{dv}{dx}$ y se obtiene: $\frac{dy}{dx} = e^{2x-1}\cdot\frac{d}{dx}(2x-1) = e^{2x-1}\cdot 2 = 2e^{2x-1}$

pero $y = e^{2x-1}$ por tanto $\frac{dy}{dx} = 2e^{2x-1} = 2y$

7 Determina la derivada de la función $y = 3\sqrt{e^{\cos x}}$

Solución

La función se puede expresar como $y = 3(e^{\cos x})^{\frac{1}{2}} = 3e^{\frac{1}{2}\cos x}$, se deriva:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(3e^{\frac{1}{2}\cos x}\right) = 3e^{\frac{1}{2}\cos x}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\cos x\right) = 3e^{\frac{1}{2}\cos x}\cdot\left(\frac{1}{2}(-\text{sen } x)\right) = -\frac{3}{2}\text{sen } x\cdot e^{\frac{1}{2}\cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2}\text{sen } x\cdot\sqrt{e^{\cos x}}$$

8 Obtén la derivada de $y = x^3\cdot e^{\sqrt{x}}$

Solución

Se utiliza la fórmula del producto $\frac{duv}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^3\cdot e^{\sqrt{x}}\right) = x^3\frac{d}{dx}e^{\sqrt{x}} + e^{\sqrt{x}}\frac{d}{dx}x^3 = x^3\cdot e^{\sqrt{x}}\frac{d}{dx}\sqrt{x} + e^{\sqrt{x}}\cdot(3x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = x^3\cdot e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} + 3x^2\cdot e^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^2\sqrt{x}\cdot e^{\sqrt{x}} + 3x^2\cdot e^{\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^2\cdot e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+6\right)$$

9 ¿Cuál es la derivada de $y = 5^{x^2+5x-7}$?

Solución

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}a^v = a^v\cdot\ln a\frac{dv}{dx}$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(5^{x^2+5x-7}) = 5^{x^2+5x-7}\cdot\ln 5\cdot\frac{d}{dx}(x^2+5x-7)\\ &= 5^{x^2+5x-7}\cdot\ln 5\cdot(2x+5)\\ &= (2x+5)\cdot 5^{x^2+5x-7}\cdot\ln 5\end{aligned}$$

10 Encuentra la derivada de la función $y = (\text{sen } x)^{e^x}$

Solución

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}u^v = v\cdot u^{v-1}\cdot\frac{du}{dx} + \ln u\cdot u^v\cdot\frac{dv}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = e^x(\text{sen } x)^{e^x-1}\frac{d}{dx}(\text{sen } x) + \ln(\text{sen } x)\cdot(\text{sen } x)^{e^x}\frac{d}{dx}(e^x)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x(\text{sen } x)^{e^x}(\text{sen } x)^{-1}(\cos x) + \ln(\text{sen } x)\cdot(\text{sen } x)^{e^x}(e^x)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x(\text{sen } x)^{e^x}\left(\frac{\cos x}{\text{sen } x}\right) + \ln(\text{sen } x)\cdot(\text{sen } x)^{e^x}(e^x) = e^x(\text{sen } x)^{e^x}\cot x + e^x(\text{sen } x)e^x\ln(\text{sen } x)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x(\text{sen } x)^{e^x}[\cot x + \ln(\text{sen } x)]$$

EJERCICIO 33

Obtén la derivada de las siguientes funciones:

1. $y = \ln x^3$
2. $f(x) = \ln 4x^2$
3. $f(x) = \ln(3x^2 - 5x + 2)$
4. $f(x) = \ln\sqrt{x}$
5. $f(x) = \log x^6$
6. $f(x) = \log 5x^3$
7. $f(x) = \log_3 x$
8. $f(x) = \log_4 \sqrt[3]{x}$
9. $f(x) = \ln^4 x$
10. $f(x) = \ln^3 5x$
11. $y = x^2 \ln x$
12. $y = x \ln x^2$
13. $y = \dfrac{\ln x}{x}$
14. $f(x) = \dfrac{\ln x^2}{x}$
15. $y = \ln\sqrt{b - ax}$
16. $f(x) = \ln x^2\sqrt{3x^2 - 1}$
17. $f(x) = \ln ax\sqrt{ax^2 - b}$
18. $y = \ln\left(\dfrac{3x-5}{2x+1}\right)$
19. $y = \ln\sqrt{\dfrac{cx-b}{cx+b}}$
20. $y = \ln \operatorname{sen} x$
21. $y = \ln \cos 5x$
22. $y = \ln(x^2 - 4)$
23. $y = \ln\sqrt{3x+4}$
24. $y = \ln\left(\dfrac{2x-3}{2x+3}\right)$
25. $y = \ln\sqrt[3]{x^3+8}$
26. $y = \ln^2(\sqrt{x})$
27. $y = \ln[(6x + 4)(3x^2 + 2)]$
28. $y = \log_3\sqrt{\dfrac{1-2x}{1+2x}}$
29. $y = \log\,(5bx^3 - 3\sqrt{x})$
30. $y = x - \ln(e^x \cos x)$
31. $y = \ln(\operatorname{sen}^2 x)$
32. $y = x \ln x$
33. $y = \ln(\sec^2 2x \cdot \cos^3 2x)$
34. $y = \sqrt{\ln x}$
35. $y = \ln(\sec x + \tan x)$
36. $y = \ln\sqrt{1 - \operatorname{sen} 2x}$
37. $y = \ln(x \operatorname{sen} x)$
38. $y = x^3 \ln x^2$
39. $y = \ln\left(\tan\sqrt{x}\right)^3$
40. $y = \log\sqrt{x}$
41. $y = 2^{x^2 + 5x}$
42. $f(x) = b^{\sqrt{x}}$
43. $y = 3^{\ln x}$
44. $y = 5^{x \operatorname{sen} x}$
45. $y = x \cdot 2^{\ln x}$
46. $y = x \cdot 5^x$
47. $y = e^{x^2}$
48. $y = e^{3x^2 - 2x + 1}$

49. $y = e^{\sqrt{3x^2-1}}$

50. $y = e^{x\tan x}$

51. $y = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{2x}{b}} - e^{-\frac{2x}{b}}\right)$

52. $y = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}$

53. $f(x) = e^{4x}$

54. $f(x) = e^{5x^2}$

55. $f(x) = e^{3x-1}$

56. $f(x) = e^{\frac{x}{5}}$

57. $f(t) = \sqrt[3]{e^t}$

58. $f(x) = \sqrt[4]{e^x}$

59. $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$

60. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

61. $f(\theta) = e^{\text{sen}^2\theta}$

62. $f(x) = e^{\cos 2x}$

63. $y = e^{x\,\text{sen}\,x}$

64. $f(x) = 5^{3x}$

65. $f(x) = 7^{2x}$

66. $f(x) = 5^{x^2}$

67. $y = x^{2x}$

68. $y = x^{\cos x}$

69. $y = \sqrt[x]{x}$

70. $y = e^{\arctan x}$

71. $y = \ln\left(\sqrt{xe^{2x}}\right)$

72. $y = xe^{\ln x^2}$

73. $y = \frac{e^x}{x+1}$

74. $y = \frac{xe^x}{\ln x^2}$

75. $y = \sqrt{\frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}}$

76. $y = \sqrt{\frac{e^{\text{sen}\,x} + 1}{e^{\text{sen}\,x} - 1}}$

77. $y = \ln(\ln \text{sen}^2 ax)$

78. $y = e^{\ln\sqrt{e^x \text{sen}\,x}}$

79. $y = x^2 e^{\text{sen}\,x}$

80. $y = \frac{\ln \text{sen}^x x}{x}$

81. $y = \ln\left(3ax^2\sqrt{x^2 - 4}\right)$

82. $y = \sqrt{x^2 + 9} + 3\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 9}\right)$

83. $y = \frac{1}{4}\sec 2x \tan 2x + \frac{1}{4}\ln(\sec 2x + \tan 2x)$

84. $y = x \arctan x - \ln\sqrt{1 + x^2}$

85. $y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 4} - 2\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 4}\right)$

86. $y = x\,\text{arc sec}\,x - \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

87. $y = \frac{1}{12}\ln\left(\frac{2x - 3}{2x + 3}\right)$

88. $y = x\,\text{arc cot}\,x + \ln\sqrt{1 + x^2}$

89. $y = x\,\text{arc csc}\frac{x}{2} + 2\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 4}\right)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Derivadas de funciones implícitas

Una función implícita es una relación que se expresa en términos de x y y, por ejemplo:

$$3x^3 - y + 5x = x^2; \qquad \text{sen}\, x = \cos(x - y); \qquad e^{x+y} = x; \qquad \ln(x + y) = \sqrt{x - y}$$

En una función implícita se derivan término a término los elementos de la igualdad respecto a la variable que se indica y al final se despeja la derivada.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es la derivada $\frac{dy}{dx}$ de la función implícita $3x^2 - 6xy + y^2 = 2x - y$?

Solución

Se derivan ambos miembros de la igualdad:

$$\frac{d}{dx}(3x^2 - 6xy + y^2) = \frac{d}{dx}(2x - y)$$

$$\frac{d3x^2}{dx} - \frac{d6xy}{dx} + \frac{dy^2}{dx} = \frac{d2x}{dx} - \frac{dy}{dx}$$

$$3\frac{dx^2}{dx} - 6\frac{dxy}{dx} + \frac{dy^2}{dx} = 2\frac{dx}{dx} - \frac{dy}{dx}$$

$$3(2x) - 6\left(x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx}\right) + 2y\frac{dy}{dx} = 2(1) - \frac{dy}{dx}$$

$$6x - 6x\frac{dy}{dx} - 6y + 2y\frac{dy}{dx} = 2 - \frac{dy}{dx}$$

Se agrupan los términos que contienen $\frac{dy}{dx}$, y se despeja:

$$-6x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 2 + 6y - 6x$$

$$\frac{dy}{dx}(-6x + 2y + 1) = 2 + 6y - 6x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - 6x + 6y}{1 - 6x + 2y}$$

Por lo regular, el resultado de la derivada de una función implícita se expresa en términos tanto de x como de y.

Es común que en algunos casos la expresión $\frac{dy}{dx}$ se represente como y'.

2 Determina la derivada y' de la función $\sqrt{x+y} = x - y$

Solución

Al derivar ambos miembros de la igualdad se obtiene:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x+y} = \frac{d}{dx}(x-y) \quad \rightarrow \quad \frac{\frac{d}{dx}(x+y)}{2\sqrt{x+y}} = \frac{dx}{dx} - \frac{dy}{dx} \quad \rightarrow \quad \frac{\frac{dx}{dx}+\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{x+y}} = 1 - \frac{dy}{dx}$$

Se despeja y' de la igualdad $\frac{1+y'}{2\sqrt{x+y}} = 1 - y'$, y el resultado es:

$$1 + y' = 2\sqrt{x+y} - 2y'\sqrt{x+y} \quad \rightarrow \quad y' + 2y'\sqrt{x+y} = 2\sqrt{x+y} - 1$$

$$y'\left(1+2\sqrt{x+y}\right) = 2\sqrt{x+y} - 1$$

$$y' = \frac{2\sqrt{x+y}-1}{1+2\sqrt{x+y}}$$

3 Obtén la derivada y' de la función $y = e^{x+y}$

Solución

Se derivan ambos miembros de la igualdad:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}e^{x+y} \quad \rightarrow \quad y' = e^{x+y}\cdot\frac{d}{dx}(x+y) \quad \rightarrow \quad y' = e^{x+y}(1+y')$$

Se despeja y' de la igualdad:

$$y' = e^{x+y} + y'e^{x+y} \quad \rightarrow \quad y' - y'e^{x+y} = e^{x+y} \quad \rightarrow \quad y'(1 - e^{x+y}) = e^{x+y}$$

Donde:

$$y' = \frac{e^{x+y}}{1-e^{x+y}} \quad \text{o} \quad y' = \frac{y}{1-y}$$

4 Encuentra la derivada y' de la función implícita $\text{sen}(x+y) = x$

Solución

$$\frac{d}{dx}\text{sen}(x+y) = \frac{dx}{dx} \quad \rightarrow \quad \cos(x+y)(1+y') = 1 \quad \rightarrow \quad \cos(x+y) + y'\cos(x+y) = 1$$

$$y'\cos(x+y) = 1 - \cos(x+y)$$

Donde, la derivada

$$y' = \frac{1-\cos(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{1}{\cos(x+y)} - \frac{\cos(x+y)}{\cos(x+y)} = \sec(x+y) - 1$$

5 Obtén la derivada $\frac{dy}{dx}$ de la función implícita $x - \ln y = \ln x$

Solución

$$\frac{d}{dx}(x-\ln y) = \frac{d}{dx}(\ln x) \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dx}-\frac{d\ln y}{dx} = \frac{d\ln x}{dx} \quad \rightarrow \quad 1-\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{x}$$

Se despeja la derivada de la igualdad:

$$-\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{x}-1 \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1-x}{x} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{xy-y}{x}$$

6 Determina la derivada respecto a x de la función $\cos(x + y) = \operatorname{sen}(x - y)$

Solución

$$\frac{d}{dx}\cos(x+y) = \frac{d}{dx}\operatorname{sen}(x-y)$$

$$-\operatorname{sen}(x+y)\frac{d}{dx}(x+y) = \cos(x-y)\frac{d}{dx}(x-y)$$

$$-\operatorname{sen}(x+y)\cdot(1+y') = \cos(x-y)\cdot(1-y')$$

$$-\operatorname{sen}(x+y) - y'\operatorname{sen}(x+y) = \cos(x-y) - y'\cos(x-y)$$

Se despeja la derivada:

$$y'\cos(x-y) - y'\operatorname{sen}(x+y) = \cos(x-y) + \operatorname{sen}(x+y)$$

$$y'[\cos(x-y) - \operatorname{sen}(x+y)] = \cos(x-y) + \operatorname{sen}(x+y)$$

$$y' = \frac{\cos(x-y)+\operatorname{sen}(x+y)}{\cos(x-y)-\operatorname{sen}(x+y)}$$

7 Encuentra la derivada de la siguiente función implícita $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2a$

Solución

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}+\sqrt{y})=\frac{d}{dx}(2a) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot y' = 0 \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{2\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = -\sqrt{\frac{y}{x}}$$

EJERCICIO 34

Deriva las siguientes funciones implícitas respecto a x:

1. $x^2 + y^2 = 4$
2. $2xy = 1$
3. $y^2 - 8x = 0$
4. $x^2 + 2y^2 + 5x - 2y - 1 = 0$
5. $3x^2 + 2xy - 6y^2 = 1$
6. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$
7. $\frac{x+y}{x-y}=x$
8. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

9. $\sqrt[3]{xy}=2$
10. $y^3-2xy^2=x^3y+5x^2y^2-y$
11. $3x^3-2x^2y+5xy=y-3x$
12. $y\sqrt{x+y}=x$
13. $\sqrt{x+y}=xy$
14. $x=\dfrac{2x-3y}{2x+3y}$
15. $\sqrt{x}-\sqrt{y}=2x$
16. $y=\ln\sqrt{x\,y}$
17. $x^2y^2=e^{\ln(xy)}$
18. $\ln(\text{sen}(e^y))=x$
19. $\dfrac{e^y}{e^x+1}=3$
20. $\ln\dfrac{y}{x^2+1}=1$
21. $x+y=\ln(x-y)$
22. $\dfrac{e^{x^2}+e^{y^2}}{x^2+y^2}=1$
23. $3^{x^2+2y}=1$
24. $x^y=2$
25. $y=\text{arc tan}\,\dfrac{x}{y}$
26. $y\ \ln\ x-x\ \ln\ y-2=0$
27. $y^2=\ln(\ln x)^y$
28. $\ln(1+e^y)=e^x$
29. $\ln x^{\ln y}-x=0$
30. $xe^y-y=0$
31. $e^{\ln y}-xy=2$
32. $\text{sen}(e^{x+y})-e^{x+y}=x$
33. $e^{x\cos y}=3x$
34. $\text{sen}(x+a)-\cos(y-b)=ab$
35. $y-\cos x=\text{sen}\,y$
36. $\text{sen}^2(4x)+\cos^2(4y)=8$
37. $e^{\cos x}-e^{\text{sen}\,y}=\text{sen}\,y$
38. $\text{sen}(xy)-2x=3$
39. $\text{sen}\,x-\cos y-3=0$
40. $e^{\cos y}=\cos x$
41. $\dfrac{1+\text{sen}\,x}{1+\text{sen}\,y}=x$
42. $x\,\text{arc tan}\,y-y=0$
43. $y=\ln[\text{sen}(x+y)]$
44. $2^y-x-3=0$
45. $e^{\text{sen}\,y}+xy-2y=0$
46. $x^y-y^x=0$
47. $2+\text{sen}(x+y)=y+\cos(x+y)$
48. $\dfrac{y}{\tan xy}-x=2$
49. $y\,\text{arc cot}\,x-x-2=0$
50. $y\,\text{arc cos}(e^x)=\cos y$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Derivadas de orden superior

Las derivadas de orden superior se obtienen al derivar una función $y = f(x)$, tantas veces como lo indique el orden requerido.

La derivada de una función se llama primera derivada y se denota con $y' = \frac{dy}{dx}$

La derivada de la derivada se llama segunda derivada y se denota con $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$

El proceso de hallar derivadas, una tras otra, se llama derivadas sucesivas.

La enésima derivada de una función se denota con $y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x)$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra la segunda derivada $\frac{d^2y}{dx^2}$ de la función $y = \cos^3 x$

Solución

Se obtiene la primera derivada de la función:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\cos^3 x}{dx} = -3\cos^2 x \operatorname{sen} x$$

Finalmente, se deriva el resultado anterior para obtener la segunda derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(-3\cos^2 x \operatorname{sen} x) = -3\cos^3 x + 6\operatorname{sen}^2 x \cos x$$

2 Determina $\frac{d^3y}{dx^3}$ de la función $y = \ln x$

Solución

Se obtiene la primera derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

Se encuentran la segunda y tercera derivadas:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \quad \rightarrow \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^3}$$

Finalmente, el resultado es: $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2}{x^3}$

3 Encuentra $\frac{d^4y}{dx^4}$ de la función $f(x) = x^3 + 2x^2 - x$

Solución

Se deriva sucesivamente la función, hasta llegar a la cuarta derivada:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x \qquad f'(x) = 3x^2 + 4x - 1 \qquad f''(x) = 6x + 4$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f^4(x) = 0$$

4 ¿Cuál es el resultado de $\frac{d^2y}{dx^2}$ de $x^2 - 3xy + y = 1$?

Solución

Se obtiene la primera derivada implícita: $\frac{d}{dx}(x^2 - 3xy + y) = \frac{d}{dx}(1) \rightarrow 2x - 3\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) + \frac{dy}{dx} = 0$

$$2x - 3x\frac{dy}{dx} - 3y + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(1 - 3x) = 3y - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - 2x}{1 - 3x}$$

La segunda derivada es: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{3y - 2x}{1 - 3x}\right) \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(1 - 3x)\left(3\frac{dy}{dx} - 2\right) - (3y - 2x)(-3)}{(1 - 3x)^2}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(1 - 3x)\left[3\left(\frac{3y - 2x}{1 - 3x}\right) - 2\right] - (3y - 2x)(-3)}{(1 - 3x)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3(3y - 2x) - 2(1 - 3x) - (3y - 2x)(-3)}{(1 - 3x)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{9y - 6x - 2 + 6x + 9y - 6x}{(1 - 3x)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{18y - 6x - 2}{(1 - 3x)^2}$$

5 Determina $\frac{d^2y}{dx^2}$ de $x^2 - xy + y^2 = 2$

Solución

Se obtiene la primera derivada:

$$\frac{d}{dx}(x^2 - xy + y^2) = \frac{d}{dx}(2) \rightarrow 2x - \left(x\frac{dy}{dx} + y\right) + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow$$

$$2x - x\frac{dy}{dx} - y + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx}(2y - x) = y - 2x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x}{2y - x}$$

Se obtiene la segunda derivada: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y - 2x}{2y - x}\right) \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2y - x)\left(\frac{dy}{dx} - 2\right) - (y - 2x)\left(2\frac{dy}{dx} - 1\right)}{(2y - x)^2}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2y - x)\left(\frac{-3y}{2y - x}\right) - (y - 2x)\left(\frac{-3x}{2y - x}\right)}{(2y - x)^2}$$

al simplificar se obtiene: $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{6(x^2 - xy + y^2)}{(2y - x)^3}$

pero $x^2 - xy + y^2 = 2$ $\quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{6(2)}{(2y - x)^3} = -\frac{12}{(2y - x)^3}$

EJERCICIO 35

Realiza lo que se te indica:

1. Determina $\frac{d^4y}{dx^4}$, si $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 5x + 2$
2. Obtén $\frac{d^3y}{dx^3}$, si $y = 4x^2 - 6x + 2$
3. Determina $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $y = \frac{4x-1}{5x+3}$
4. Determina $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $y = \frac{ax+b}{ax-b}$
5. Obtén $\frac{d^3y}{dx^3}$, si $y = (ax + b)^4$
6. Determina $\frac{d^4y}{dx^4}$, si $y = \text{sen } x + \cos x$
7. Determina $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $y = \ln(\text{sen } x)$
8. Obtén $\frac{d^3y}{dx^3}$, si $y = \frac{3}{(x-1)^2}$
9. Encuentra $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $y = \tan e^x$
10. ¿Cuál es la $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $x - 3xy + 2y = 0$?
11. Obtén $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $y = \sqrt{9-x^2}$
12. Determina $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $x^2 + y^2 = 16$
13. Obtén $\frac{d^4y}{dx^4}$, si $y = x \ln x$
14. Calcula la $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $\text{sen } x + \cos y = 0$
15. Si $y = x^2 \text{ sen } x$, obtén $\frac{d^3y}{dx^3}$
16. Si $y = \frac{x-1}{x+1}$, obtén $\frac{d^3y}{dx^3}$; $\frac{d^ny}{dx^n}$
17. Encuentra y'' de $xy + y - 1 = 0$
18. Si $y = \ln(\cos x)$, determina $\frac{d^3y}{dx^3}$
19. Si $f(x) = \frac{1}{1+\text{sen } x}$, obtén $\frac{d^2y}{dx^2}$
20. Determina y'' y y''' de $x^2 + xy + y^2 = 2$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Derivadas de ecuaciones polares

Sea $\rho = f(\theta)$ una función en coordenadas polares. La pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $P(r, \theta)$ es:

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\rho' \operatorname{sen}\theta + \rho\cos\theta}{\rho'\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$$

EJEMPLOS

1 Determina $\frac{dy}{dx}$, para la ecuación polar $\rho = 4\cos 3\theta$

Solución

Por el teorema:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left[\frac{d(4\cos 3\theta)}{d\theta}\right]\operatorname{sen}\theta + [4\cos 3\theta]\cos\theta}{\left[\frac{d(4\cos 3\theta)}{d\theta}\right]\cos\theta - [4\cos 3\theta]\operatorname{sen}\theta} = \frac{-12\operatorname{sen}3\theta\operatorname{sen}\theta + 4\cos 3\theta\cos\theta}{-12\operatorname{sen}3\theta\cos\theta - 4\cos 3\theta\operatorname{sen}\theta} = \frac{3\operatorname{sen}3\theta\operatorname{sen}\theta - \cos 3\theta\cos\theta}{3\operatorname{sen}3\theta\cos\theta + \cos 3\theta\operatorname{sen}\theta}$$

2 Encuentra la pendiente de la recta tangente a la curva $\rho = 1 + \operatorname{sen}\theta$ en $\theta = \frac{\pi}{4}$

Solución

Al utilizar el teorema:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left[\frac{d}{d\theta}(1+\operatorname{sen}\theta)\right]\operatorname{sen}\theta + (1+\operatorname{sen}\theta)\cos\theta}{\left[\frac{d}{d\theta}(1+\operatorname{sen}\theta)\right]\cos\theta - (1+\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \cos\theta + \cos\theta\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta}$$

$$= \frac{2\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}2\theta + \cos\theta}{\cos 2\theta - \operatorname{sen}\theta}$$

Se evalúa ρ' en $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$m = \frac{\operatorname{sen}2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{0 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\sqrt{2} - 1$$

EJERCICIO 36

Determina la derivada de las siguientes ecuaciones polares:

1. $\rho = 2 \text{ sen } \theta + 3 \cos \theta$
2. $\rho = 4 \csc \theta$
3. $\rho = a \text{ sen } 5\theta$
4. $\rho = \sqrt{\text{sen } 2\theta}$
5. $\rho = 1 + \cos \theta$
6. $\rho = \dfrac{a}{1 - \cos \theta}$
7. $\rho = e^{a\theta}$
8. $\rho = 4 \sec^2 \dfrac{\theta}{2}$
9. $\rho = 3 - 2 \cos \theta$
10. $\rho = 4\sqrt{\theta}$

En las siguientes ecuaciones polares, encuentra la pendiente en el punto indicado:

11. $\rho = 2 \cos \theta, \theta = \dfrac{\pi}{8}$
12. $\rho = \text{sen } \theta - \cos \theta, \theta = \dfrac{\pi}{3}$
13. $\rho = \tan \theta, \theta = \dfrac{\pi}{4}$
14. $\rho = \dfrac{2}{a - \text{sen } \theta}, \theta = \pi$
15. $\rho = 2\sqrt{\cos \frac{\theta}{2}}, \theta = -\dfrac{\pi}{2}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Derivada de ecuaciones paramétricas

La curva $y = f(x)$ se define por las ecuaciones paramétricas $x = h(t)$ y $y = g(t)$; entonces, la pendiente de la recta tangente en un punto $P(x, y)$ es:

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dt}g(t)}{\frac{d}{dt}h(t)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \text{ con } \frac{dx}{dt} \neq 0$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula $\dfrac{dy}{dx}$ para la función cuyas ecuaciones paramétricas son $x = t^2 + 3t$, $y = \dfrac{1}{t+1}$

Solución

Se determinan las derivadas respecto a t:

$$\frac{dx}{dt} = 2t + 3; \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{(t+1)^2}$$

Por el teorema:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{1}{(t+1)^2}}{2t+3} = -\frac{1}{(2t+3)(t+1)^2}$$

2 Determina la pendiente de la recta tangente en el punto (x, y) a la curva, si sus ecuaciones paramétricas son $x = t - 2$, $y = \frac{1}{8}t^2 + 1$ en el intervalo $-3 \leq t \leq 3$, para el punto correspondiente a $t = 2$

Solución

Para aplicar el teorema se obtienen las derivadas: $\frac{dy}{dt}$ y $\frac{dx}{dt}$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{8}(t^2)+1\right] = \frac{1}{8}(2t) = \frac{2t}{8} = \frac{t}{4} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t-2) = 1$$

Al sustituir los resultados, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{t}{4}}{1} = \frac{t}{4}$$

Se evalúa la derivada en $t = 2$, para obtener el valor de la pendiente:

$$m = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

EJERCICIO 37

Deriva las siguientes funciones paramétricas:

1. $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = t^2 - 4 \end{cases}$, $\quad t \in R$

2. $\begin{cases} x = 3t^3 - 5 \\ y = \dfrac{t+2}{4} \end{cases}$, $\quad 1 \leq t \leq 3$

3. $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 - t} \\ y = t \end{cases}$, $\quad t \in R$

4. $\begin{cases} x = b \sec \theta \\ y = a \tan \theta \end{cases}$, $\quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

5. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} \\ y = t\sqrt{t-1} \end{cases}$, $\quad t \in R$

6. $\begin{cases} x = 5 \operatorname{sen} \theta - \cos \theta \\ y = \operatorname{sen} \theta - 4 \cos \theta \end{cases}$, $\quad 0 \leq \theta \leq \pi$

7. $\begin{cases} x = \dfrac{t}{t^2 - 1} \\ y = \dfrac{t^2 + 1}{t + 1} \end{cases}$, $\quad t \in R$

8. $\begin{cases} x = \cos\dfrac{\theta}{2} \\ y = \text{sen } 2\theta \end{cases}$, $\quad -\dfrac{\pi}{2} \leq \theta < \dfrac{\pi}{2}$

9. $\begin{cases} x = 5t^2 \\ y = \dfrac{4}{t^2} \end{cases}$, $\quad -3 < t < 3$

10. $\begin{cases} x = 3 + 2\tan\theta \\ y = 4 + \csc\theta \end{cases}$, $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

En las siguientes ecuaciones paramétricas obtén el valor de la pendiente en el punto indicado:

11. $\begin{cases} x = 1 + \text{sen } t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $\quad 0 \leq t \leq 2\pi,$ $\quad t = \dfrac{\pi}{3}$

12. $\begin{cases} x = mt^2 + b \\ y = nt + a \end{cases}$ $\quad m \leq t \leq n,$ $\quad t = 2mn$

13. $\begin{cases} x = b(2 - 3t) \\ y = at^2 \end{cases}$ $\quad 3a < t < 2b,$ $\quad t = \dfrac{b}{2a}$

14. $\begin{cases} x = 3t - \cos t \\ y = \text{sen } t \end{cases}$ $\quad 0 \leq t \leq \pi,$ $\quad t = \pi$

15. $\begin{cases} x = 2\cot^2\theta \\ y = 4\cot\theta \end{cases}$ $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$ $\quad \theta = \dfrac{\pi}{4}$

16. $\begin{cases} x = 5t^2 \\ y = t - t^2 \end{cases}$ $\quad -3 < t < 3,$ $\quad t = 1$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 5

Aplicaciones de la derivada

Reseña HISTÓRICA

L'Hôpital escribió el primer libro de cálculo en 1696, en el cual eran obvias las influencias de sus profesores Johann Bernoulli, Jacob Bernoulli y Leibniz.

L'Hôpital sirvió como oficial de caballería, pero tuvo que retirarse a causa de ser corto de vista. Desde ese tiempo dirigió su atención hacia las matemáticas. L'Hôpital aprendió cálculo de su maestro Johann Bernoulli en 1691.

L'Hôpital era un excelente matemático, en 1692 su fama está basada en su libro *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes.*

En este libro publicó la regla que ahora se conoce como regla de L'Hôpital, para encontrar el límite de una función racional cuyo numerador y denominador tienden a cero.

Guillaume François Antoine marqués de L`Hôpital
(1661-1704)

Rectas tangente y normal a una curva

Analicemos primero algunas definiciones:

Tangente

Recta que toca a una curva en un punto.

Normal

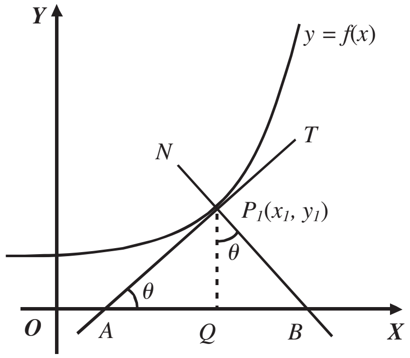
Recta perpendicular a la recta tangente en el punto de tangencia.
T: recta tangente
N: recta normal

$\overline{AP_1}$: longitud de la tangente

$\overline{P_1B}$: longitud de la normal

$\overline{AQ}$: longitud de la subtangente

$\overline{QB}$: longitud de la subnormal



- ***Longitud de la subtangente***. En el triángulo AQP_1 la $\tan\theta = \dfrac{\overline{P_1Q}}{\overline{AQ}}$, pero $\overline{P_1Q} = y_1$ y $\tan\theta = m = \dfrac{dy}{dx}$, al despejar $\overline{AQ}$ se obtiene, $\overline{AQ} = \dfrac{\overline{P_1Q}}{\tan\theta}$, por consiguiente:

$$\overline{AQ} = \frac{y_1}{\dfrac{dy}{dx}}$$

- ***Longitud de la subnormal***. En el triángulo BQP_1 la $\tan\theta = \dfrac{\overline{QB}}{\overline{QP_1}}$, pero $\overline{QP_1} = y_1$ y $\tan\theta = m = \dfrac{dy}{dx}$, por tanto, al despejar $\overline{QB}$ se obtiene, $\overline{QB} = \overline{QP_1}\cdot\tan\theta$, por consiguiente:

$$\overline{QB} = y_1\frac{dy}{dx}$$

- ***Longitud de la tangente***. Es la distancia que existe entre el punto de tangencia y la intersección de la recta tangente con el eje X.
  En el triángulo AQP_1 por el teorema de Pitágoras:

$$(\overline{AP_1})^2 = (\overline{AQ})^2 + (\overline{QP_1})^2$$

Pero, $\overline{AQ} = \dfrac{y_1}{\frac{dy}{dx}}$ y $\overline{QP_1} = y_1$, por consiguiente:

$$\overline{AP_1}^2 = \left(\frac{y_1}{\frac{dy}{dx}}\right)^2 + (y_1)^2 = \frac{(y_1)^2}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + (y_1)^2 = \frac{(y_1)^2}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$$

Al despejar $\overline{AP_1}$ se obtiene, $\overline{AP_1} = \dfrac{y_1}{\frac{dy}{dx}}\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$, por tanto,

$$\overline{AP_1} = \frac{y_1}{y'}\sqrt{1+y'^2}$$

- ***Longitud de la normal***. Es la distancia que existe entre el punto de tangencia y la intersección de la recta normal con el eje X.
  En el triángulo BQP_1 por el teorema de Pitágoras:

$$(\overline{BP_1})^2 = (\overline{BQ})^2 + (\overline{QP_1})^2$$

Pero $\overline{BQ} = y_1 \cdot \dfrac{dy}{dx}$ y $\overline{QP_1} = y_1$

$$(\overline{BP_1})^2 = \left(y_1 \cdot \frac{dy}{dx}\right)^2 + (y_1)^2 = (y_1)^2\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$$

Al despejar $\overline{BP_1}$, se obtiene, $\overline{BP_1} = y_1\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$, por consiguiente:

$$\overline{BP_1} = y_1\sqrt{1+y'^2}$$

Ecuación de la recta tangente

La ecuación de la recta tangente a una curva en el punto $P_1(x_1, y_1)$ con pendiente $m = \dfrac{dy}{dx}$ está dada por:

$$y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1)$$

Ecuación de la recta normal

La ecuación de la recta normal a una curva en el punto $P_1(x_1, y_1)$ con pendiente $m = -\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$ está determinada por:

$$y - y_1 = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(x - x_1)$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la curva $x^2 + xy + y = x - 4$ en el punto $(1, -2)$?

Solución

Se derivan ambos miembros de la ecuación:

$$\frac{d(x^2+xy+y)}{dx}=\frac{d(x-4)}{dx} \quad \rightarrow \quad 2x+\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)+\frac{dy}{dx}=1 \quad \rightarrow \quad 2x+x\frac{dy}{dx}+y+\frac{dy}{dx}=1$$

Se despeja $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-2x-y}{1+x}\text{, por definición } m_T=\frac{1-2x-y}{1+x}$$

Al sustituir las coordenadas del punto de tangencia en la pendiente, se obtiene:

$$m=\frac{1-2(1)-(-2)}{1+1}=\frac{1}{2}$$

2 Determina la pendiente de la recta tangente a la curva $\delta = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$, en el punto $\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$

Solución

Al derivar la ecuación de la curva:

$$\frac{d\delta}{d\theta}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\frac{d\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{d\theta}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)(-1)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

se obtiene que: $m_T=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

Se sustituye el punto en la pendiente:

$$m=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3 Encuentra la longitud de la subtangente, la subnormal, la tangente y la normal a la curva $f(x) = -x^2 + 6x - 4$ en el punto $P(1, 1)$.

Solución

Se deriva la función y se evalúa en el punto para encontrar la pendiente de la recta tangente en ese punto.

$$f'(x) = -2x + 6$$

Si $x = 1$, entonces,

$$f'(1) = -2(1) + 6 = -2 + 6 = 4$$

Por tanto,

subtangente: $\dfrac{y_1}{\dfrac{dy}{dx}} = \dfrac{1}{4}$ subnormal: $y_1 \dfrac{dy}{dx} = (1)(4) = 4$

tangente: $\dfrac{y_1}{\dfrac{dy}{dx}}\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2} = \dfrac{1}{4}\sqrt{17}$ normal: $y_1\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{17}$

4 Determina la ecuación de las rectas tangente y normal a la curva $xy + y - 1 = 0$ en el punto $\left(3, \dfrac{1}{4}\right)$

Solución

Al derivar la función se obtiene $y' = -\dfrac{y}{x+1}$, por definición $m_T = -\dfrac{y}{x+1}$

Se evalúa en el punto $\left(3, \dfrac{1}{4}\right)$, $m_T = -\dfrac{\dfrac{1}{4}}{3+1} = -\dfrac{1}{16}$

Ecuación de la tangente:

Se obtiene con $P\left(3, \dfrac{1}{4}\right)$ y $m_T = -\dfrac{1}{16}$, se sustituye en $y - y_1 = \dfrac{dy}{dx}(x - x_1)$

$$y - \frac{1}{4} = -\frac{1}{16}(x-3) \quad \rightarrow \quad 16y - 4 = -x + 3 \quad \rightarrow \quad x + 16y - 7 = 0$$

Ecuación de la normal:

Se obtiene con $P\left(3, \dfrac{1}{4}\right)$ y $m_N = -\dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}} = 16$, se sustituye en $y - y_1 = -\dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}}(x - x_1)$

$$y - \frac{1}{4} = 16(x-3) \quad \rightarrow \quad 4y - 1 = 64x - 192 \quad \rightarrow \quad 64x - 4y - 191 = 0$$

Las ecuaciones de las rectas tangente y normal son: $x + 16y - 7 = 0$ y $64x - 4y - 191 = 0$

EJERCICIO 38

Calcula la longitud de la subtangente, la subnormal, la tangente y la normal de las curvas dadas en el punto indicado.

1. $f(x) = -x + 2$ en $x = 3$
2. $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ en $x = -2$
3. $y = x^2 - 5x + 6$ en el punto $(-1, 12)$
4. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ en el punto $(2, 7)$
5. $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ en el punto $(2, 3)$
6. $f(x) = \sqrt{-x}$ en el punto $(-9, 3)$
7. $f(x) = \sqrt{x+3}$ en el punto $(1, 2)$
8. $y = \dfrac{1}{x}$ en $x = 2$

9. $f(x) = x^2 - 4x$ en $x = 3$

10. $x^2y - y - 2 = 0$ en el punto $\left(2, \frac{2}{3}\right)$

Determina la ecuación de las rectas tangente y normal a la curva en el punto indicado:

11. $y = x^2 + 5$ en el punto $(-2, 9)$

12. $y = x^2 - x + 1$ en el punto $(0, 1)$

13. $y = 4x^2 - 4x + 1$ en el punto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

14. $y = x^3 - x^2$ en el punto $(2, 4)$

15. $y = x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 5x - 9$ en el punto $(-1, -4)$

16. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ en el punto $\left(\sqrt{5}, 2\right)$

17. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ en el punto $(3, 2)$

18. $f(x) = \frac{2}{x+1}$ en el punto $(0, 2)$

19. $y = \text{sen}\, x$ en el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

20. $y = \cos x$ en el punto $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$

21. $y = \tan x + 2$ en el punto $\left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$

22. $x^2 - y^2 - 12 = 0$ en el punto $(4, 2)$

23. $xy = 1$ en el punto $(1, 1)$

24. $x^3 + 2xy - 4 = 0$ en el punto de abscisa $x = 1$

25. $x^2y^2 - 4y + 1 = 0$ en el punto de abscisa $x = 2$

26. $\sqrt{x + y} = x + 1$ en el punto de abscisa $x = 3$

27. $f(x) = \ln x$ en el punto de abscisa $x = e$

28. $xy + x - 2 = 0$ en el punto de abscisa $x = \frac{1}{2}$

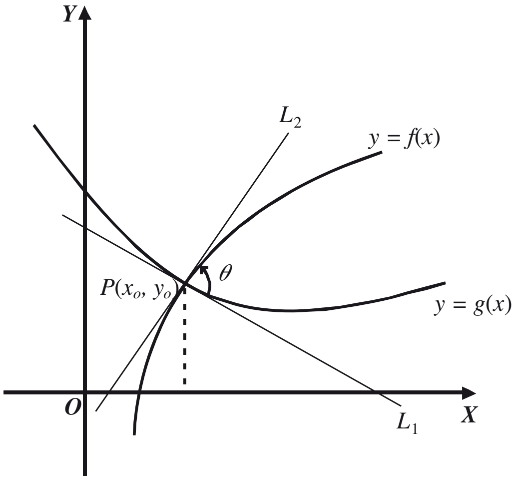
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ángulo entre dos curvas

Sea $P(x_o, y_o)$ el punto de intersección entre las curvas $f(x)$ y $g(x)$, entonces el ángulo θ entre las curvas se obtiene con:

$$\tan\theta = \frac{f'(x_o) - g'(x_o)}{1 + f'(x_o)\cdot g'(x_o)}$$

Donde $f'(x_o)$ es la pendiente de la recta L_2 y $g'(x_o)$ es la pendiente de la recta L_1



EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el ángulo agudo formado por las curvas $f(x) = 4 - x^2$ y $g(x) = x^2$ en el punto de intersección, cuya abscisa es $x = \sqrt{2}$

Solución

Se obtienen las derivadas de las funciones:

$$f(x) = 4 - x^2 \qquad g(x) = x^2$$

$$f'(x) = -2x \qquad g'(x) = 2x$$

Se evalúa la abscisa $x = \sqrt{2}$ en las pendientes (derivadas)

$$f'(\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} \qquad g'(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

Se aplica la fórmula, entonces;

$$\tan\theta = \frac{f'(\sqrt{2}) - g'(\sqrt{2})}{1 + f'(\sqrt{2})g'(\sqrt{2})} = \frac{-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{1 + (-2\sqrt{2})(2\sqrt{2})} = -\frac{4\sqrt{2}}{1-8} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

Al despejar θ

$$\theta = \text{arc tan}\left(\frac{4\sqrt{2}}{7}\right)$$

Por tanto:

$$\theta = 38°\ 56'\ 32''$$

2 ¿Cuál es la medida de los ángulos formados por las curvas $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 - y^2 + 6x + 8 = 0$ en los puntos $\left(-1, \sqrt{3}\right)$, $\left(-1, -\sqrt{3}\right)$?

Solución

Paso I:
Se obtienen las pendientes de las curvas al derivar las ecuaciones y evaluar los puntos dados:

De la curva $x^2 + y^2 = 4$, $y' = -\frac{x}{y}$ y de la curva $x^2 - y^2 + 6x + 8 = 0$, $y' = \frac{x+3}{y}$

En el punto $\left(-1, \sqrt{3}\right)$, las pendientes son: $\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $\frac{2}{\sqrt{3}}$ respectivamente.

En el punto $\left(-1, -\sqrt{3}\right)$, las pendientes son: $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ respectivamente.

Paso II:
Se obtiene el ángulo al sustituir el valor de las pendientes en la fórmula.

Para el punto $\left(-1, \sqrt{3}\right)$:

$$\tan\theta = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5\sqrt{3}}$$

Por consiguiente: $\theta = 19° \, 6'$

Para el punto $\left(-1, -\sqrt{3}\right)$

$$\tan\theta = \frac{-\frac{2}{\sqrt{3}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1 + \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{5}{3}} = -\frac{3}{5\sqrt{3}}$$

Finalmente: $\theta = 160° \, 54'$

3 Encuentra la medida del ángulo agudo formado por las curvas $x^2 + y^2 - 8 = 0$ y $y^2 - 2x = 0$

Solución

Se obtienen las intersecciones de las curvas mediante un sistema de ecuaciones:

$$x^2 + y^2 - 8 = 0;\ y^2 = 2x \quad \rightarrow \quad x^2 + 2x - 8 = 0$$
$$(x + 4)(x - 2) = 0$$
$$x = -4,\ x = 2$$

Luego, si $x = 2$ entonces $y = \pm 2$ que resultan en los puntos (2, 2) y (2, −2)
Se obtienen las derivadas de cada una de las ecuaciones:

$$x^2 + y^2 - 8 = 0 \qquad y^2 - 2x = 0$$
$$2x + 2yy' = 0 \qquad 2yy' - 2 = 0$$
$$y' = -\frac{x}{y} \qquad y' = \frac{1}{y}$$

Se realiza la evaluación en los puntos (2, 2) y (2, −2)

Para el punto (2, 2) $\rightarrow$ $y_1' = -\frac{2}{2} = -1;\ y_2' = \frac{1}{2}$

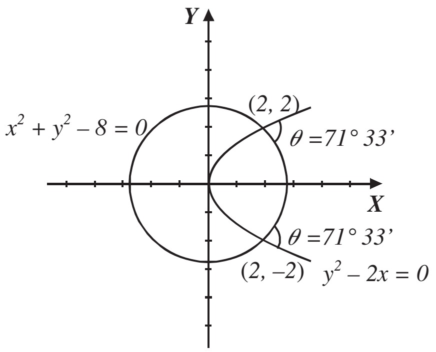
Luego:

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}-(-1)}{1+\frac{1}{2}(-1)} = \frac{\frac{1}{2}+1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3;\ \text{donde } \theta = \text{arc tan}(3) = 71°\ 33'$$

Para el punto (2, −2) $\rightarrow$ $y_2' = -\frac{2}{-2} = 1;\ y_1' = -\frac{1}{2}$

Luego,

$$\tan\theta = \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+(1)\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3;\ \text{donde } \theta = \text{arc tan}(3) = 71°\ 33'$$



EJERCICIO 39

Determina la medida del ángulo agudo y obtuso que forman las curvas dadas en el punto indicado:

1. $y = x^2 + 1$; $y = \sqrt{x+1}$ en el punto $(0, 1)$
2. $y = \frac{4}{9}x^2$; $y = \sqrt{25 - x^2}$ en el punto $(3, 4)$
3. $y = \sqrt{13 - x^2}$; $y = \sqrt{18 - (x+5)^2}$ en el punto $(-2, 3)$
4. $x^2 - y^2 - 2 = 0$; $y^2 - x = 0$ en el punto $\left(2, \sqrt{2}\right)$
5. $3x^2 + 5y = 0$; $2x + 5y + 1 = 0$ en el punto $\left(1, -\frac{3}{5}\right)$
6. $xy = 1$; $y = \frac{x-1}{x}$ en el punto $\left(2, \frac{1}{2}\right)$
7. $x^2 + y^2 - 5 = 0$; $y^2 - 4x = 0$ en el punto de abscisa 1
8. Determina la medida del ángulo obtuso que forma $x^2 + 3y^2 - 13 = 0$ y $y^2 - 4x = 0$

Calcula la medida del ángulo agudo que forman las curvas dadas:

9. $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$; $4y^2 - 9x = 0$

10. $xy - x - 2 = 0$; $xy - 1 = 0$

11. $x = \sqrt{2y}$; $y = 2(x+2)^2$

12. $y = x^2 + x$; $y = -x^2 + 5x$

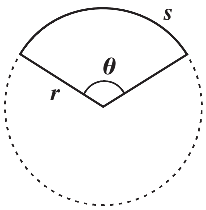
13. $y^2 = x + 1$; $y^2 + 2x - 4 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Curvatura

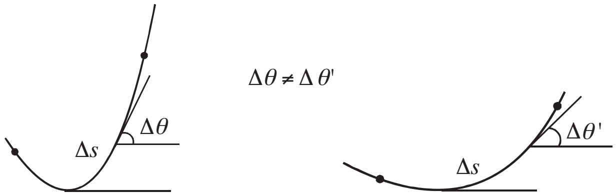
Radio de curvatura

En geometría plana la longitud de un segmento circular está dada por la fórmula: $s = r \cdot \theta \quad \rightarrow \quad r = \frac{s}{\theta}$



En la figura se observa que s cambia cuando θ cambia.

En una curva cualquiera, al tomar un segmento muy pequeño formado por dos puntos de la curva y al relacionar la fórmula anterior se tiene que:

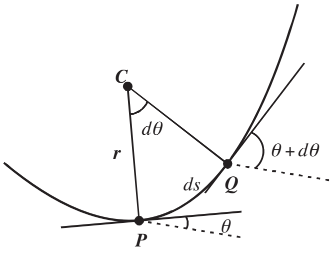


De la fórmula anterior se define Δr como:

$$\Delta r = \frac{\Delta s}{\Delta \theta}$$

Luego, si la longitud Δs es cada vez más pequeña, es decir, tiende a cero, el *radio de curvatura* se define como el siguiente límite:

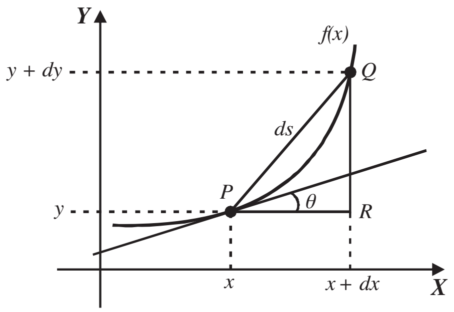
$$r = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta \theta} = \frac{ds}{d\theta} \quad \rightarrow \quad r = \frac{ds}{d\theta}$$



En la figura se tienen dos puntos, P y Q, de la curva, muy próximos entre sí, en cada punto se traza una recta tangente y su normal. Al punto de intersección entre las normales se le llama *centro de curvatura* y a la distancia del centro a cualquiera de los puntos P y Q se le llama *radio de curvatura*.

La expresión $\frac{1}{r}=\frac{d\theta}{ds}$ recibe el nombre de *curvatura*.

Para determinar la fórmula que permita calcular el radio de curvatura se tiene la siguiente figura.



En la función $f(x)$ se tienen los puntos P y Q infinitamente muy próximos, de manera que la longitud del segmento circular ds sea igual a la longitud del segmento PQ; entonces, de la representación geométrica de la derivada se tiene que:

$$\frac{dy}{dx}=\tan\theta \;\rightarrow\; \theta=\text{arc}\tan\frac{dy}{dx}$$

Del triángulo PQR y el teorema de Pitágoras se obtiene:

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{\left[1+\frac{(dy)^2}{(dx)^2}\right](dx)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\;dx$$

Luego,

$$ds=r\cdot d\theta \;\rightarrow\; r=\frac{ds}{d\theta}$$

$$r=\frac{ds}{d\theta} \;\rightarrow\; r=\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\;dx}{d\,\text{arc}\tan\frac{dy}{dx}} \;\rightarrow\; r=\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\;dx}{\dfrac{\frac{d^2y}{dx^2}\cdot dx}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \;\rightarrow\; r=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

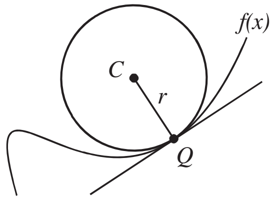
Finalmente, la fórmula para determinar el radio de curvatura es:

$$r=\frac{\sqrt{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|} \quad \text{o} \quad r=\frac{\sqrt{\left[1+(y')^2\right]^3}}{|y''|}$$

La longitud del radio de curvatura es una cantidad positiva.

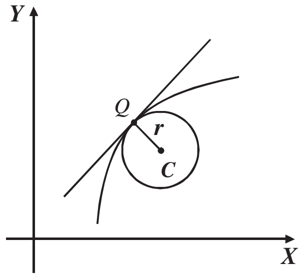
Círculo de curvatura

Es una curva dada en un punto de tangencia a la circunferencia, que tiene de centro el centro de curvatura y de radio el radio de curvatura y que pasa por un punto de tangencia, también se le conoce como circunferencia osculatriz o círculo osculador.



Centro de curvatura

Para determinar la fórmula que permita calcular el centro de curvatura se tiene la siguiente figura.



Donde:

$C(\alpha, \beta)$: centro de curvatura

$Q(x, y)$: punto de la curva

r: radio de curvatura

Se obtiene la ecuación de la recta normal de la recta tangente en el punto Q.

$$\beta - y = -\frac{1}{y'}(\alpha - x)$$

Se obtiene la ecuación de la circunferencia de centro el punto $C(\alpha, \beta)$, radio r y que pasa por el punto $Q(x, y)$.

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

Al resolver el sistema de ecuaciones, se obtienen las coordenadas del centro de curvatura.

$$\alpha = x - \left(\frac{\frac{dy}{dx}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}} \right), \quad \beta = y + \left(\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \right)$$

$$\alpha = x - \left(\frac{y'\left[1 + (y')^2\right]}{y''} \right), \quad \beta = y + \left(\frac{1 + (y')^2}{y''} \right)$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el radio de curvatura y la curvatura de la curva $x^2 + y^2 = 25$ en el punto (3, 4)

Solución

Se obtienen la primera y la segunda derivadas de la función dada.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x^2+y^2}{y^3}$$

El punto se evalúa en cada derivada.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{3}{4};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x^2+y^2}{y^3} = -\frac{3^2+4^2}{4^3} = -\frac{25}{64}$$

Los valores que se obtienen se sustituyen en la fórmula de radio de curvatura.

$$r = \frac{\sqrt{\left[1+(y')^2\right]^3}}{|y''|} \rightarrow r = \frac{\sqrt{\left[1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2\right]^3}}{\left|-\frac{25}{64}\right|} \rightarrow r = \frac{\frac{125}{64}}{\frac{25}{64}} \rightarrow r = 5$$

Por tanto, el radio de curvatura es:

$$r = 5$$

Luego, el valor de la curvatura se obtiene con la expresión:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r}$$

Finalmente, el valor de la curvatura es:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{5}$$

2 Determina el radio y el centro de curvatura de curva $y^2 = -8x$, en el punto $(-2, 4)$

Solución

Se obtienen la primera y la segunda derivadas de la curva y se evalúa el punto.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4}{y} = -\frac{4}{4} = -1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{16}{y^3} = -\frac{16}{(4)^3} = -\frac{1}{4}$$

Los valores obtenidos se sustituyen en la fórmula del radio de curvatura.

$$r = \frac{\sqrt{\left[1+(-1)^2\right]^3}}{\left|-\frac{1}{4}\right|} \rightarrow r = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{4}} \rightarrow r = 8\sqrt{2}$$

Por tanto, el radio de curvatura es:

$$r = 8\sqrt{2}$$

Luego, el punto $(-2, 4)$ y los valores de las derivadas, se sustituyen en las fórmulas que determinan las coordenadas del centro de curvatura.

$$\alpha = x - \left(\frac{y'\left[1+(y')^2\right]}{y''}\right) \rightarrow \alpha = -2 - \left(\frac{-1\left[1+(-1)^2\right]}{-\frac{1}{4}}\right) \rightarrow \alpha = -2-8=-10$$

$$\beta = y + \left(\frac{1+(y')^2}{y''}\right) \rightarrow \beta = 4 + \left(\frac{1+(-1)^2}{-\frac{1}{4}}\right) \rightarrow \beta = 4-8=-4$$

Por tanto, las coordenadas del centro de curvatura son el punto $(-10, -4)$

Radio de curvatura en coordenadas paramétricas

Dadas las ecuaciones de una curva en coordenadas paramétricas.

$$x = f(t),\ y = g(t)$$

Entonces, al derivar y sustituir en la fórmula del radio de curvatura en coordenadas rectangulares, se obtiene:

$$r = \frac{\left[\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\right]^3}{\left|\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\right|} \rightarrow r = \frac{\left[\sqrt{(x')^2+(y')^2}\right]^3}{\left|x'\cdot y'' - y'\cdot x''\right|}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

3 Determina el radio de curvatura de la elipse $x = 2\cos t$, $y = 3\,\text{sen}\,t$ en el punto correspondiente a $t = \frac{\pi}{2}$

Solución

Se obtienen la primera y la segunda derivadas de cada ecuación y se evalúa $t = \frac{\pi}{2}$ en cada una de ellas.

$$x = 2\cos t \;\rightarrow\; x' = -2\,\text{sen}\,t \;\rightarrow\; x' = -2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2(1) = 2$$

$$x'' = -2\cos t \;\rightarrow\; x'' = -2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2(0) = 0$$

$$y = 3\,\text{sen}\,t \;\rightarrow\; y' = 3\cos t \;\rightarrow\; y' = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3(0) = 0$$

$$y'' = -3\,\text{sen}\,t \;\rightarrow\; y'' = -3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3(1) = -3$$

Los valores obtenidos se sustituyen en la fórmula del radio de curvatura:

$$r = \frac{\left[\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\right]^3}{|x'\cdot y'' - y'\cdot x''|} \;\rightarrow\; r = \frac{\left[\sqrt{(2)^2 + (0)^2}\right]^3}{|(2)(-3) - (0)(0)|} \;\rightarrow\; r = \frac{8}{|-6|} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Por consiguiente, el radio de curvatura de la elipse en el punto correspondiente a $t = \frac{\pi}{2}$ es:

$$r = \frac{4}{3}$$

Radio de curvatura en coordenadas polares

Dada la curva con ecuación de la forma:

$$\rho = f(\theta)$$

Se tiene que:

$$x = \rho\cos\theta\,,\; y = \rho\,\text{sen}\,\theta$$

Si se sustituye $\rho = f(\theta)$ en estas últimas ecuaciones, se obtiene:

$$x = f(\theta)\cos\theta\,,\; y = f(\theta)\,\text{sen}\,\theta$$

Entonces, al derivar y sustituir en la fórmula del radio de curvatura en coordenadas rectangulares, se obtiene:

$$r = \frac{\left[\sqrt{\rho + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\right]^3}{\left|\rho^2 + 2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 - \rho\cdot\frac{d^2\rho}{d\theta^2}\right|} \;\rightarrow\; r = \frac{\left[\sqrt{\rho + (\rho')^2}\right]^3}{|\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''|}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

4 Determina el radio de curvatura de la curva $\rho = \cos 2\theta$, en el punto correspondiente a $\theta = \pi$

Solución

Se determinan la primera y la segunda derivadas de la función dada y se evalúa $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\rho = \cos 2\theta \;\rightarrow\; \rho = \cos 2(\pi) \;\rightarrow\; \rho = 1$$

$$\rho' = -2 \operatorname{sen} 2\theta \;\rightarrow\; \rho' = -2 \operatorname{sen} 2(\pi) \;\rightarrow\; \rho' = 0$$

$$\rho'' = -4 \cos 2\pi \;\rightarrow\; \rho'' = -4 \cos 2(\pi) \;\rightarrow\; \rho'' = -4$$

Los valores se sustituyen en la fórmula y se simplifican las operaciones.

$$r = \frac{\left[\sqrt{1+(0)^2}\right]^3}{\left|(1)^2 + 2(0)^2 - (1)(-4)\right|} = \frac{\left[\sqrt{1}\right]^3}{|1+0+4|} = \frac{1}{|5|} = \frac{1}{5}$$

Por tanto, el valor del radio de curvatura es:

$$r = \frac{1}{5}$$

EJERCICIO 40

Determina el radio de curvatura y la curvatura de las curvas en el punto dado:

1. $x^2 - y^2 = -3$ — $(1, 2)$
2. $xy + y + 4 = 0$ — $(3, -1)$
3. $x^2 + 4y = 0$ — $(2, -1)$
4. $y = x^3$ — $(1, 1)$
5. $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}$ — $t = \pi$
6. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t^2 \end{cases}$ — $t = 2$
7. $\rho = \cos \theta$ — $\theta = \frac{\pi}{2}$
8. $\rho = \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$ — $\theta = \frac{\pi}{3}$

Determina el centro de curvatura de las curvas en el punto dado:

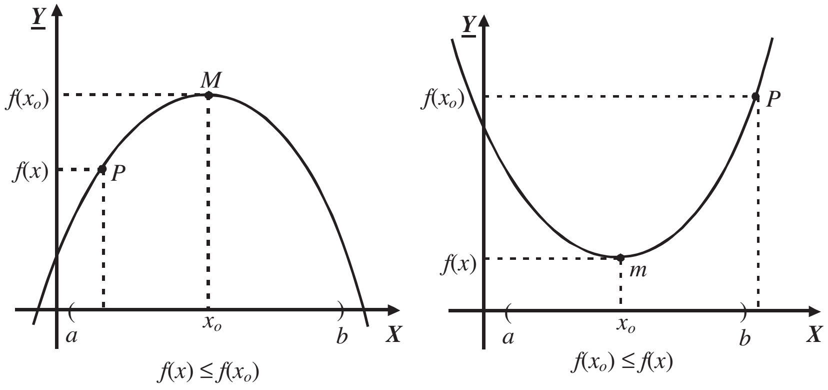
9. $x^2 - 4y = 0$ — $(2, 1)$
10. $x^2 + 4y^2 - 8 = 0$ — $(-2, 1)$
11. $y = \operatorname{sen} x$ — $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$
12. $y - e^x = 0$ — $(0, 1)$
13. $y = \sqrt{x+1}$ — $(3, 2)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

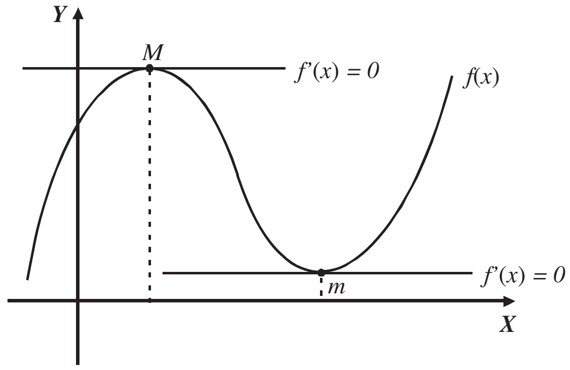
Máximos y mínimos de una función

Definición

1. Se dice que una función $f(x)$ tiene un máximo local M en $x = x_o$, si $f(x_o) \geq f(x)$ para toda x en un intervalo (a, b) tal que x_o, pertenezca a dicho intervalo.
2. Se dice que una función $f(x)$ tiene un mínimo local m en $x = x_o$, si $f(x_o) \leq f(x)$ para toda x en un intervalo (a, b) tal que x_o, pertenezca a dicho intervalo.



Si $f(x)$ tiene un máximo o mínimo local en x_o, entonces la pendiente de la recta tangente (derivada) en dicho punto es igual a cero.



Donde:

M = punto máximo

m = punto mínimo

Criterio de la primera derivada para encontrar puntos máximos y mínimos

a) Si $f'(x) > 0$, para toda $x \in (a, x_o)$ y $f'(x) < 0$, para toda $x \in (x_o, b)$ (es decir, la derivada cambia de valores positivos a negativos), entonces en $f(x_o)$ existe un valor máximo local.

b) Si $f'(x) < 0$ para toda $x \in (a, x_o)$ y $f'(x) > 0$, para toda $x \in (x_o, b)$ (es decir, la derivada cambia de valores negativos a positivos), entonces en $f(x_o)$ existe un valor mínimo local.

c) Si para toda $x \in (a, b)$ y $f'(x)$ tiene el mismo signo, entonces $f(x)$ no tiene valor máximo ni mínimo local.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina los puntos máximos y mínimos para la función $f(x) = 3x^2 - 12x + 15$, utiliza el criterio de la primera derivada.

Solución

Paso I
Se obtiene la derivada de la función:

$$f'(x) = 6x - 12$$

Paso II
La derivada se iguala a cero y se resuelve la ecuación:

$$f'(x) = 6x - 12; \qquad 6x - 12 = 0 \qquad \text{donde} \qquad x = 2$$

Este resultado recibe el nombre de valor o punto crítico.

Paso III
Se da un valor menor y uno mayor próximo al valor crítico y se evalúan en la derivada.
Para $x = 2$ se toman los valores 1 y 3

$$f'(1) = 6(1) - 12 = -6 < 0 \qquad \text{y} \qquad f'(3) = 6(3) - 12 = 6 > 0$$

El cambio de signo es de negativo a positivo, entonces la función tiene un valor mínimo en $x = 2$.

Paso IV
El valor crítico se evalúa en la función:

$$f(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 15$$

$$f(2) = 3$$

Por consiguiente, el punto mínimo es (2, 3)

2 Obtén los puntos máximos y mínimos para la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 15$

Solución

Paso I
Se obtiene la derivada de la función:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

Paso II
La derivada se iguala a cero y se resuelve la ecuación:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 \quad \rightarrow \quad 6x^2 - 6x - 12 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

Los valores críticos son:

$$x_1 = 2, x_2 = -1$$

Paso III

Se dan valores menores y mayores próximos a los valores críticos y se evalúan en la derivada.

Para $x = -1$, se toman los valores $x = -\frac{3}{2}$ y $x = -\frac{1}{2}$

$$f'\left(-\frac{3}{2}\right) = 6\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{-3}{2}\right) - 12 = \frac{21}{2} > 0 \quad \text{y} \quad f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 6\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{-1}{2}\right) - 12 = -\frac{15}{2} < 0$$

La derivada cambia de signo positivo a negativo, entonces la función tiene un valor máximo en $x = -1$

Para $x = 2$ se toman los valores $x = \frac{3}{2}$ y $x = \frac{5}{2}$

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = 6\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{3}{2}\right) - 12 = -\frac{15}{2} < 0 \quad \text{y} \quad f'\left(\frac{5}{2}\right) = 6\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{5}{2}\right) - 12 = \frac{21}{2} > 0$$

La derivada cambia de signo negativo a positivo, entonces la función tiene un valor mínimo en $x = 2$

Paso IV

Los valores críticos se evalúan en la función:

Para $x = -1$, $f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 15 = 22$

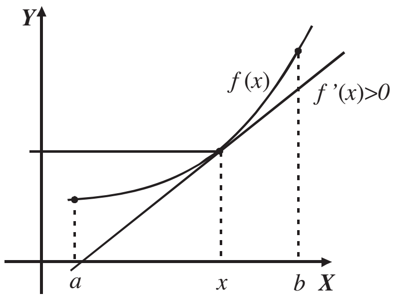
Para $x = 2$, $f(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 12(2) + 15 = -5$

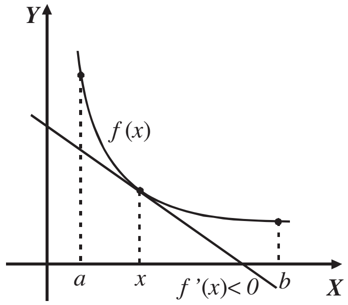
Por tanto, el punto máximo es $(-1, 22)$ y el punto mínimo es $(2, -5)$

Intervalos donde crece o decrece una función

Definición

1. Una función es creciente en el intervalo (a, b), si $f'(x) > 0$ para toda $x \in (a, b)$
2. Una función es decreciente en el intervalo (a, b), si $f'(x) < 0$ para toda $x \in (a, b)$





Observación 1. Existen funciones siempre crecientes, pero su derivada se anula para algún valor de x.

Ejemplo

La función $f(x) = 1 + (x - 2)^3$ es siempre creciente, pero su derivada es cero para $x = 2$

$$f'(x) = 3(x - 2)^2 \rightarrow f(2) = 3(2 - 2)^2 = 3(0) = 0$$

Observación 2. Existen funciones siempre decrecientes, pero su derivada se anula para algún valor de x.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 La función $f(x) = 1 - (x-2)^3$ es siempre decreciente, pero su derivada es cero para $x = 2$

$$f'(x) = -3(x-2)^2 \quad \rightarrow \quad f(2) = -3(2-2)^2 = -3(0) = 0$$

2 Indica los intervalos donde la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x$ es creciente y decreciente.

Solución

a) Intervalo donde $f(x)$ es creciente.

Paso I
Se obtiene la derivada de la función: $f'(x) = x^2 - x - 6$

Paso II
Por definición $f'(x) > 0$

$$x^2 - x - 6 > 0$$

Al resolver la desigualdad se obtienen los intervalos:

$$(-\infty, -2) \cup (3, \infty)$$

Donde la función es creciente.

b) Intervalo donde $f(x)$ es decreciente.

Paso I
Se obtiene la derivada de la función:

$$f'(x) = x^2 - x - 6$$

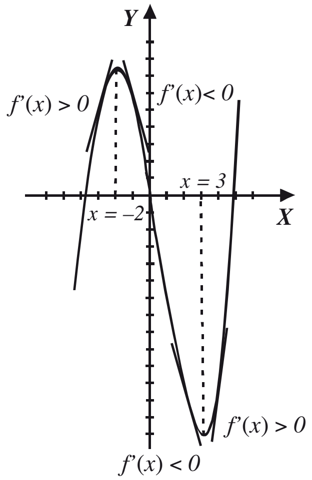
Paso II
Por definición $f'(x) < 0$

$$x^2 - x - 6 < 0$$

Al resolver la desigualdad se obtiene el intervalo:

$$(-2, 3)$$

Donde la función es decreciente.
Gráfica:



EJERCICIO 41

Encuentra los máximos, los mínimos y los intervalos para los que la función es creciente o decreciente.

1. $f(x) = x^2 - 6x + 5$
2. $f(x) = -3x^2 + 5x - 4$
3. $f(x) = x^3 - 3x$
4. $f(x) = x^3 - 6x^2$
5. $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x$
6. $f(x) = 4x^3 - x^2 - 4x + 3$
7. $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 5$
8. $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 1$
9. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x + 4$
10. $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$
11. $y = \frac{3}{x^2 - 2x}$
12. $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$
13. $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 4}$
14. $y = \frac{x^2 - 1}{4 - x^2}$
15. $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Criterio de la segunda derivada para encontrar puntos máximos y mínimos

a) Dada $y = f(x)$ con $f'(x_o) = 0$, si $f''(x_o) > 0$, entonces el punto $(x_o, f(x_o))$ representa un punto mínimo.
b) Dada $y = f(x)$ con $f'(x_o) = 0$, si $f''(x_o) < 0$, entonces el punto $(x_o, f(x_o))$ representa un punto máximo.

Ejemplo

Determina con el criterio de la segunda derivada los puntos máximos y mínimos de la función

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x - 10$$

Solución

Paso I
Se obtiene la derivada de la función:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24$$

Paso II
Se iguala la derivada a cero y se resuelve la ecuación:

$$3x^2 - 6x - 24 = 0$$
$$x^2 - 2x - 8 = 0$$
$$(x - 4)(x + 2) = 0$$

Los valores críticos son:

$$x = 4 \quad \text{y} \quad x = -2$$

Paso III

Se obtiene la segunda derivada y se evalúa con los valores críticos:

$$f''(x) = 6x - 6$$

Para $x = -2$

$$f''(-2) = 6(-2) - 6 = -18 < 0$$

Por tanto, la función tiene un valor máximo en $x = -2$

Para $x = 4$

$$f''(4) = 6(4) - 6 = 18 > 0$$

Por tanto, la función tiene un valor mínimo en $x = 4$

Paso IV

Los valores críticos se evalúan en la función:

Para $x = -2$

$$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 - 24(-2) - 10 = 18$$

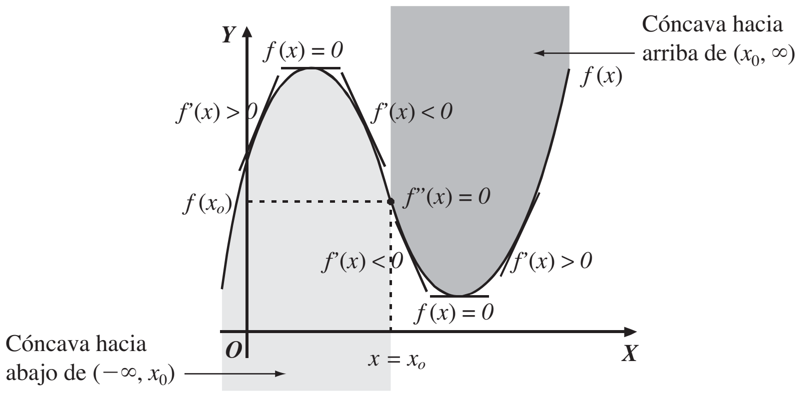
Para $x = 4$

$$f(4) = (4)^3 - 3(4)^2 - 24(4) - 10 = -90$$

Entonces, la función tiene un punto máximo en $(-2, 18)$ y un punto mínimo en $(4, -90)$

Concavidad y punto de inflexión de una función

La función $f(x)$ es cóncava hacia arriba cuando las rectas tangentes a dicha función están por debajo de la curva.
La función $f(x)$ es cóncava hacia abajo cuando las rectas tangentes a dicha función están por arriba de la curva.



Donde $(x_o, f(x_o))$ es el punto de inflexión.

Prueba de concavidad:

1. Una función es cóncava hacia arriba en un intervalo (a, b) si para todo $x \in (a, b)$, $f''(x) > 0$
2. Una función es cóncava hacia abajo en un intervalo (a, b) si para todo $x \in (a, b)$, $f''(x) < 0$
3. Una función tiene un punto de inflexión en $(x_o, f(x_o))$ si $f''(x_o) = 0$

Ejemplo

Determina las coordenadas del punto de inflexión y los intervalos de concavidad para la función:

$$f(x) = -2x^3 + 9x^2 + 60x$$

Solución

Punto de inflexión

Paso I
Se obtiene la segunda derivada:

$$f'(x) = -6x^2 + 18x + 60 \quad \rightarrow \quad f''(x) = -12x + 18$$

Paso II
La segunda derivada se iguala a cero y se resuelve la ecuación:

$$-12x + 18 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{3}{2}$$

Paso III
Se evalúa la función con $x = \frac{3}{2}$:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -2\left(\frac{3}{2}\right)^3 + 9\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 60\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{207}{2}$$

Por consiguiente, las coordenadas del punto de inflexión son $\left(\frac{3}{2}, \frac{207}{2}\right)$

Intervalos de concavidad

Intervalo donde la función es cóncava hacia arriba.
Por definición $f''(x) > 0$, entonces:

$$-12x + 18 > 0$$

Al resolver la desigualdad se obtiene que $x < \frac{3}{2}$, por tanto, el intervalo donde la función es cóncava hacia arriba es: $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$

Intervalo donde la función es cóncava hacia abajo.
Por definición $f''(x) < 0$

$$-12x + 18 < 0$$

Al resolver la desigualdad se obtiene que $x > \frac{3}{2}$, entonces, el intervalo donde la función es cóncava hacia abajo es: $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$

EJERCICIO 42

Dadas las siguientes funciones, determina:

a) Puntos máximos y mínimos.
b) Intervalos donde la función crece y decrece.
c) Intervalos de concavidad.
d) Puntos de inflexión.
e) Gráfica.

1. $f(x) = x^2 - 6x + 10$
2. $f(x) = -x^2 + 4x + 6$
3. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$
4. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 24$
5. $f(x) = x^4 - 4x^3$
6. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$
7. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$
8. $f(x) = (x^2 - 1)^2$
9. $f(x) = \sqrt{x^2 + 36}$
10. $f(x) = x^3(x + 2)$
11. $f(x) = \text{sen}(2x)$ en $[0, \pi]$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Optimización

Los métodos para obtener puntos máximos y mínimos de una función son una herramienta que se emplea para solucionar problemas prácticos donde se va a optimizar una variable.

Hay una gran variedad de problemas, por lo que resulta difícil dar reglas específicas para resolverlos. No obstante se dan algunas sugerencias:

- Leer cuidadosamente el problema y pensar en los hechos que se presentan y las variables desconocidas.
- Hacer un diagrama o dibujo geométrico que incluya los datos.
- Relacionar los datos con las variables desconocidas, hallando la función a maximizar o minimizar.
- Encontrar los valores críticos y determinar cuál corresponde a un máximo o a un mínimo.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra dos números positivos cuya suma sea 20 y el producto del cuadrado de uno de ellos por el cubo del otro, sea un valor máximo.

Solución

Sean x y y los números buscados, entonces:

La suma de los números es 20: $x + y = 20$

El producto del cuadrado de uno de ellos por el cubo del otro, es máximo: $P = x^2y^3$

Se despeja y de la primera igualdad y se sustituye en el producto:

$$x + y = 20 \qquad \rightarrow \qquad y = 20 - x$$

Por tanto: $P = x^2y^3 = x^2(20 - x)^3$ será la función a maximizar.

Se obtiene la derivada: $P'(x) = x(20 - x)^2(40 - 5x)$

La derivada se iguala con cero: $P'(x) = 0$, $x(20 - x)^2(40 - 5x) = 0$

Al resolver esta última ecuación se obtienen los valores críticos: $x = 0$, $x = 20$, $x = 8$

Se obtiene la segunda derivada: $P''(x) = -20x^3 + 720x^2 - 7\,200x + 16\,000$

Se analizan los valores críticos:

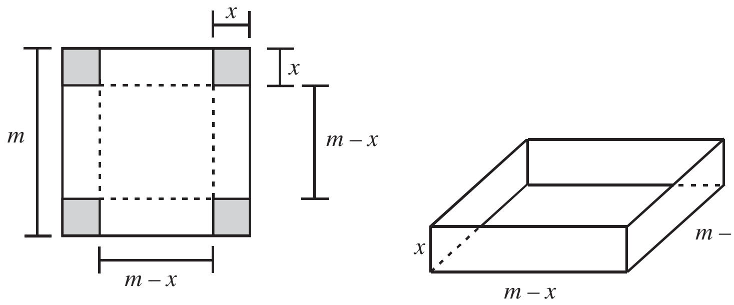
Para $x = 0$, $P''(0) = 16\,000 > 0$, entonces en $x = 0$ existe un valor mínimo
Para $x = 20$, $P''(20) = 0$, entonces en $x = 20$ no existe valor máximo ni mínimo
Para $x = 8$, $P''(8) = -5\,760 < 0$, entonces en $x = 8$ existe un valor máximo

Por tanto, uno de los valores es $x = 8$ y al sustituir en $y = 20 - x$, se obtiene $y = 12$, entonces los números que se buscan son:

$$x = 8,\ y = 12$$

2 De las cuatro esquinas de una lámina cuadrada de lado m, se suprimen cuadrados iguales de lado x. Se doblan los bordes de la lámina recortada para formar una caja sin tapa. Determina la longitud de x, para que el volumen de la caja sea máximo.

Solución



El volumen de la caja en términos de la variable x está dado por la función:

$$V(x) = (m - 2x)(m - 2x)(x) \qquad V(x) = (m - 2x)^2(x)$$

$$V(x) = (x)(m - 2x)^2$$

$$V(x) = (x)(m^2 - 4mx + 4x^2)$$

$$V(x) = m^2x - 4mx^2 + 4x^3 \text{ función a maximizar.}$$

Se encuentra la derivada respecto a la variable x de la función:

$$V'(x) = m^2 - 8mx + 12x^2$$

Se iguala a cero la derivada:

$$V'(x) = 0; \quad m^2 - 8mx + 12x^2 = 0$$

Al resolver se obtienen los valores críticos:

$$x = \frac{m}{2} \quad \text{y} \quad x = \frac{m}{6}$$

Se obtiene la segunda derivada y se evalúan los valores de x:

$$V''\left(\frac{m}{2}\right) = -8m + 24\left(\frac{m}{2}\right) = -8m + 12m = 4m > 0 \text{ mínimo}$$

$$V''\left(\frac{m}{6}\right) = -8m + 24\left(\frac{m}{6}\right) = -8m + 4m = -4m < 0 \text{ máximo}$$

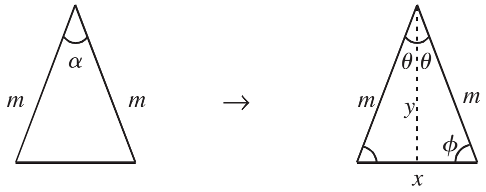
Por consiguiente, el valor de x para que la caja tenga un volumen máximo es:

$$x = \frac{m}{6}$$

3 Determina el ángulo que deben formar los lados iguales de un triángulo isósceles para que su área sea máxima.

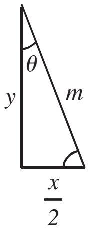
Solución

Se construye una figura con los datos:



Sea x la base y y la altura, entonces su área es $A = \frac{1}{2}xy$

Se toma la mitad del triángulo:



Se aplican identidades trigonométricas en el triángulo para el ángulo θ

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\frac{x}{2}}{m} = \frac{x}{2m} \quad \text{donde,} \quad x = 2m\operatorname{sen}\theta \qquad\qquad \cos\theta = \frac{y}{m} \quad \text{donde,} \quad y = m\cos\theta$$

Al sustituir los valores de x y y se obtiene:

$$A(\theta) = \frac{1}{2}\left(2m\operatorname{sen}\theta\right)(m\cos\theta) \quad \rightarrow \quad A(\theta) = \frac{1}{2}m^2\left[2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right]$$

Pero $2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \operatorname{sen}2\theta$, entonces $A = \frac{1}{2}m^2\operatorname{sen}2\theta$, ésta es la función a maximizar.

Se obtiene la derivada y se iguala a cero:

$$A'(\theta) = m^2\cos 2\theta \quad \rightarrow \quad A'(\theta) = 0 \quad \rightarrow \quad m^2\cos 2\theta = 0$$

$m \neq 0$; entonces $\cos 2\theta = \frac{0}{m^2} = 0$, despejando el ángulo:

$$\cos 2\theta = 0 \qquad 2\theta = \cos^{-1}(0)$$

$$\theta = \frac{1}{2}\cos^{-1}(0)$$

$$\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

Se obtiene la segunda derivada y se evalúa en $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$A''(\theta) = -2m^2 \operatorname{sen} 2\theta \quad \rightarrow \quad A''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2m^2 \operatorname{sen} 2\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$A''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2m^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$A''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2m^2(1)$$

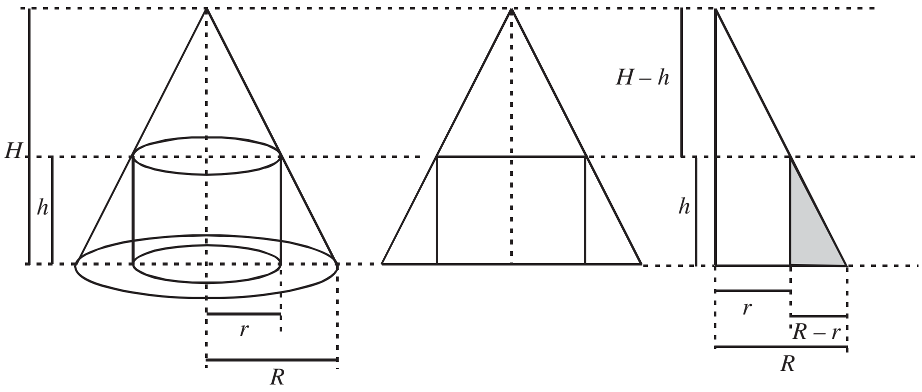
$$A''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2m^2 < 0$$

El área es máxima para $\theta = \frac{\pi}{4}$ y el ángulo que deben formar los lados iguales es de 90°

4 Calcula el volumen máximo del cilindro circular recto que se puede inscribir en un cono de H cm de altura y R cm de radio en su base, de manera que los ejes del cilindro y el cono coincidan.

Solución

Observa la figura.



De acuerdo con ella se hace un corte transversal y se obtiene el triángulo que se muestra; por construcción se tienen triángulos semejantes que cumplen con la siguiente proporción:

$$\frac{R}{R-r} = \frac{H}{h}$$

El volumen del cilindro es:

$$V = \pi r^2 h$$

Despejando h de la proporción y sustituyéndola en la fórmula del volumen se obtiene:

$$h = \frac{HR - Hr}{R} = H - \frac{H}{R}r \quad \rightarrow \quad V = \pi r^2 h = \pi r^2\left(H - \frac{H}{R}r\right) = \pi H r^2 - \frac{\pi H r^3}{R}$$

La cual es la función a maximizar.

Se deriva la función:

$$V'(r) = 2\pi Hr - \frac{3\pi Hr^2}{R}$$

La derivada se iguala a cero y se resuelve la ecuación para r:

$$V'(r) = 0, \qquad 2\pi Hr - \frac{3\pi Hr^2}{R} = 0$$

Si $R \neq 0$, entonces $2\pi HRr - 3\pi Hr^2 = 0 \rightarrow \pi Hr(2R - 3r) = 0 \rightarrow r(2R - 3r) = 0$
Valores críticos:

$$r = 0,\ r = \frac{2}{3}R$$

Se analizan los valores críticos en la segunda derivada:

$$V''(r) = 2\pi H - \frac{6\pi H}{R}r$$

Para $r = 0$; $V''(0) = 2\pi H - \frac{6\pi H}{R}(0) = 2\pi H > 0$, entonces, el volumen es mínimo.

Para $r = \frac{2}{3}R$; $V''\left(\frac{2}{3}R\right) = 2\pi H - \frac{6\pi H}{R}\left(\frac{2}{3}R\right) = -2\pi H < 0$, entonces, el volumen es máximo.

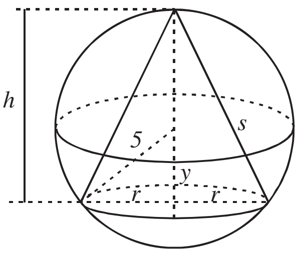
Entonces, las dimensiones del cilindro de volumen máximo inscrito en el cono son:

$$r = \frac{2}{3}R \ \text{ y } \ h = H - \frac{H}{R}r = H - \frac{H}{R}\left(\frac{2}{3}R\right) = \frac{1}{3}H$$

5 Determina las dimensiones del cono circular recto de área máxima, que puede inscribirse en una esfera de radio $R = 5$u

Solución

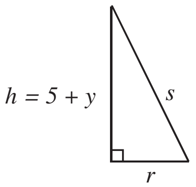
Figura



El área del cono de radio r, altura h y generatriz s, está dada por:

$$A = \pi rs$$

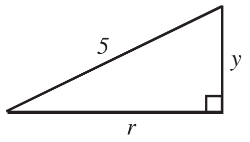
De la figura se toma el triángulo rectángulo



Mediante el teorema de Pitágoras se obtiene:

$$s^2 = (5 + y)^2 + r^2 \qquad s = \sqrt{(5+y)^2 + r^2}$$

De la figura se toma el triángulo rectángulo,



Por el teorema de Pitágoras:

$$5^2 = r^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad r^2 = 25 - y^2$$

Este resultado se sustituye en: $s = \sqrt{(5+y)^2 + r^2}$

$$s = \sqrt{(5+y)^2 + (25 - y^2)}$$

y a su vez en $A = \pi rs$

$$A = \pi\ r\ \sqrt{(5+y)^2 + 25 - y^2}$$

Maximizar A equivale a maximizar A^2, y el problema se reduce a términos simples, es decir:

$$A^2 = \pi^2 r^2 \left[(5+y)^2 + 25 - y^2\right], \text{ pero } r^2 = 25 - y^2, \text{ entonces:}$$

$$A^2 = \pi^2(25 - y^2)\left[(5+y)^2 + 25 - y^2\right] \quad \rightarrow \quad A^2 = \pi^2(25 - y^2)\left[25 + 10y + y^2 + 25 - y^2\right]$$

$$A^2 = \pi^2(25 - y^2)(50 + 10y)$$

$$A^2 = \pi^2(25 - y^2)(10)(5 + y)$$

$$A^2 = 10\pi^2(125 + 25y - 5y^2 - y^3)$$

Si $A^2 = f(y)$, entonces, $f(y) = 10\pi^2(125 + 25y - 5y^2 - y^3)$ es la función a maximizar.

Paso I
Se obtiene la derivada de la función:

$$f'(y) = 10\pi^2(25 - 10y - 3y^2)$$

Paso II
La derivada se iguala a cero y se determinan los valores críticos:

$$f'(y) = 0 \quad \rightarrow \quad 10\pi^2(25 - 10y - 3y^2) = 0 \quad \rightarrow \quad y = -5,\ y = \frac{5}{3}$$

Paso III
Se evalúan los valores críticos en la segunda derivada para determinar los máximos o mínimos de la función:

$$f''(y) = 10\pi^2(-10 - 6y)$$

Para $y = -5$

$$f''(-5) = 10\pi^2(-10 - 6(-5)) = 200\pi^2 > 0, \text{ mínimo.}$$

Para $y = \frac{5}{3}$,

$$f''\left(\frac{5}{3}\right) = 10\pi^2\left(-10 - 6\left(\frac{5}{3}\right)\right) = -200\pi^2 < 0, \text{ máximo.}$$

Entonces, para $y = \frac{5}{3}$ el área del cono es máxima, sustituyendo en las fórmulas: $r^2 = 25 - y^2$ y $h = 5 + y$, se obtienen las dimensiones del radio y la altura del cono inscrito en la esfera:

$$r^2 = 25 - y^2 \qquad h = 5 + y$$

$$r = \sqrt{25 - \left(\frac{5}{3}\right)^2} \qquad h = 5 + \frac{5}{3}$$

$$r = \sqrt{25 - \frac{25}{9}} = \sqrt{\frac{200}{9}} = \frac{10\sqrt{2}}{3}\text{u} \qquad h = \frac{20}{3}\text{u}$$

Finalmente, el radio y la altura miden respectivamente:

$$r = \frac{10}{3}\sqrt{2}\text{ u} \qquad h = \frac{20}{3}\text{u}$$

EJERCICIO 43

Resuelve los siguientes problemas:

1. Encuentra dos números cuya suma sea 40 y su producto sea máximo.
2. Encuentra dos números cuya diferencia sea 50 y su producto mínimo.
3. Con una lámina cuadrada de aluminio de 12 pulgadas por lado, se quiere construir una caja sin tapa, cortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando los bordes. ¿Cuánto deben medir por lado los cuadrados recortados para obtener un volumen máximo?, ¿Cuánto mide dicho volumen?
4. Calcula el volumen máximo de un cilindro circular recto que se puede inscribir en un cono de 72 cm de altura y 24 cm de radio en su base, de manera que los ejes del cilindro y el cono coincidan?
5. En la construcción de un recipiente cilíndrico de hojalata se emplean 100 pulg^2, esta cantidad incluye las tapas. ¿Cuál es el mayor volumen que podría tener la lata?
6. ¿Cuáles son las dimensiones que debe tener un cono de volumen máximo cuya área lateral es de 10 πu^2?
7. Un cartel tiene una superficie de 150 cm^2 con márgenes de 3 cm en las partes superior e inferior y 2 cm a los lados. Calcula el área máxima impresa en el cartel.
8. Considera un triángulo rectángulo con sus catetos sobre los ejes de coordenadas y la hipotenusa pasa por el punto (4, 3). Determina el área mínima que puede encerrar tal triángulo.
9. ¿Qué número positivo minimiza la suma entre él y su recíproco?
10. Determina las dimensiones del triángulo isósceles de superficie máxima que podría inscribirse en un círculo de radio r.
11. ¿Cuáles son los dos puntos sobre la curva $y = x^3$ cuyas abscisas difieren en dos unidades, de tal forma que la recta que los une tiene una pendiente mínima?
12. ¿Cuál es el área máxima posible de un rectángulo, cuya base coincide con el eje X y sus vértices superiores están en la curva $y = 4 - x^2$?
13. Encuentra las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en un semicírculo de radio igual a 2 unidades.
14. La resistencia de una viga rectangular varía según sus dimensiones. Si la resistencia es proporcional al cuadrado del ancho de la viga por la altura, ¿cuáles son las dimensiones de la viga más resistente que podrá cortarse de un tronco cilíndrico con radio de 3 pies?

15. ¿Cuál es la distancia mínima que existe entre el punto (5, 1) y la parábola $y = -x^2$?
16. La suma de dos números es 16. Encuentra los números si la suma de sus cubos es un valor mínimo.
17. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de mayor perímetro que se puede inscribir en un semicírculo con radio de 5 unidades?
18. Se inscribe un rectángulo en un triángulo isósceles, cuyos lados tienen longitudes 5, 5 y 6. Uno de los lados del rectángulo está sobre la base del triángulo (lado desigual), ¿cuál es el área mayor que puede abarcar el rectángulo?
19. Se desea inscribir un cono dentro de otro. El cono exterior tiene una altura de 6 cm y un radio de 4 cm. El cono interior se inscribe de modo que su cúspide reposa sobre la base del cono exterior. La base del cono interior es paralela a la base del cono exterior. Los ejes de los conos son colineales. ¿Cuál deberá ser la altura del cono interior, a fin de que contenga el mayor volumen posible?
20. Calcula las dimensiones de un triángulo isósceles con un perímetro de 6 unidades que tenga área máxima.
21. Determina dos números reales positivos, cuya suma sea 40 y su producto sea máximo.
22. Encuentra las dimensiones del cono recto circular de máximo volumen que puede ser inscrito en una esfera de radio 6 unidades.
23. Obtén las coordenadas del punto de la recta $3x + y - 5 = 0$ más cercano al origen.
24. ¿Cuál es el área del rectángulo mayor que se puede inscribir en un triángulo rectángulo de lados 5, 12 y 13 cm?
25. Calcula el área del rectángulo mayor que se puede inscribir en la elipse, cuya ecuación es $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
26. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto (3, 4) y forma con el primer cuadrante un triángulo de área mínima.
27. ¿Cuáles son las dimensiones del cilindro circular recto de máxima área lateral que puede inscribirse en una esfera de radio de ocho pulgadas?
28. Para la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = a^2$, considera el punto $(0, k)$ sobre su eje conjugado y determina el punto más cercano a éste.
29. Determina dos números positivos cuyo producto es 16 y tienen suma mínima.
30. En la construcción de una casa se van a emplear ventanas en forma de rectángulos curvados por semicírculos. Si el perímetro total de cada ventana es P, ¿cuáles son las dimensiones más convenientes para que las ventanas proporcionen máxima iluminación?
31. Una persona tiene una pared de piedra en el costado de un terreno. Dispone de 1 600 m de material para cercar y desea hacer un corral rectangular utilizando el muro como uno de sus lados, ¿qué dimensiones debe tener el corral para tener la mayor área posible?
32. Un alambre de 100 cm de largo se va a partir en dos trozos, una de las partes se va a doblar para formar una circunferencia, y la otra un triángulo equilátero. ¿Cómo se debe cortar el alambre para que la suma de las áreas del círculo y del triángulo sea máxima?
33. Se desea construir un cono con una generatriz de 10 cm. ¿Cuál es el mayor volumen posible para dicho cono?
34. Encuentra las dimensiones del rectángulo inscrito en un círculo con radio de 25 cm que proporcione el área máxima.
35. Para construir un recipiente cilíndrico de hojalata se emplearán 150 pulg^2, esta cantidad incluye las tapas. ¿Cuáles son las dimensiones del cilindro para que contenga el volumen máximo?
36. Un anuncio de 20 metros de altura está colocado sobre una base que se encuentra 5 metros sobre el nivel de los ojos de una persona, ¿qué tan alejada debe estar la persona para que su ángulo de visión sea máximo?
37. Un silo consta de un cilindro con una parte superior semiesférica. Determina la longitud del radio del silo con un volumen V, que tiene la menor área de superficie, incluye la tapa inferior.
38. ¿Cuáles son los puntos sobre la curva $y = x^2 - 4$, que están más cerca del punto $(-2, 1)$?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Movimiento rectilíneo uniforme

Si un punto se mueve sobre una recta una distancia s, en un tiempo t con velocidad uniforme v, entonces:

$$v = \frac{s}{t}\text{, de aquí } s = v \cdot t$$

Sean (s_1, t_1) y (s_2, t_2) dos pares de valores de s y t, tal que:

$$s_1 = vt_1 \text{ y } s_2 = vt_2$$

Entonces:

$$s_2 - s_1 = v(t_2 - t_1)$$

Donde:

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \text{velocidad uniforme}$$

El concepto de velocidad media es más general que el de velocidad uniforme para cualquier tipo de movimiento rectilíneo.

La distancia dirigida s, de un punto P, desde un origen en un tiempo t, está dada por:

$$s = s(t)$$

Entonces, a la función $s = \{(t, s) \mid s = s(t)\}$ se le denomina "función de posición" del punto P y la velocidad media de P durante el intervalo $[t_1, t_2]$ se define como:

$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Si $t_2 - t_1 = h$, entonces $t_2 = t_1 + h$ con $h \neq 0$, luego $s(t_2) = s(t_1 + h)$ y la velocidad media de P durante el intervalo $[t_1, t_2] = [t_1, t_1 + h]$ es:

$$\frac{s(t_1 + h) - s(t_1)}{h}$$

Se obtiene el límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{s(t_1 + h) - s(t_1)}{h}$$

Este límite se llama *velocidad instantánea*, rapidez o simplemente velocidad de P en el tiempo t. Un físico interpretaría esto como el valor límite de las velocidades medias, medidas sobre las porciones de tiempo cada vez menores alrededor de t.

Al generalizar:

Si la función de posición de un punto P es:

$$s = \{(t, s) \mid s = s(t)\}$$

La velocidad de P en el tiempo t será:

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

La cual se denomina función velocidad del punto P.

Puesto que $s = s(t)$, $v = v(t)$ y $v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$, entonces $v = \frac{ds(t)}{dt}$

Aceleración media

$v = \{(t, v) \mid v = v(t)\}$ la razón $\dfrac{v(t_1 + h) - v(t_1)}{h}$, se llama velocidad media de P, durante el intervalo $[t_1, t_2] = [t_1, t_1 + h]$

Si existe $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{v(t_1 + h) - v(t_1)}{h}$, entonces se le denomina aceleración de P en el tiempo t_1 y se denota mediante $a(t_1)$, entonces:

$$a(t_1) = \left.\frac{dv(t_1)}{dt}\right|_{t_1} = v'(t_1) = s''(t_1)$$

Por tanto:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Ejemplo

Una partícula se mueve conforme a la expresión $s(t) = 2t^2 - 3t + 3$, donde s se expresa en metros y t en segundos.

Determina:

a) Su posición inicial.
b) Su velocidad al inicio de su movimiento.
c) La velocidad que alcanza al transcurrir 3 segundos.
d) La velocidad final a los 5 segundos.
e) Su aceleración.

Solución

a) Su posición inicial se determina cuando $t = 0$, entonces,

$$s(0) = 2(0)^2 - 3(0) + 3 = 3 \text{ m}$$

b) La velocidad al inicio de su movimiento se obtiene mediante la primera derivada evaluada en $t = 0$

$$s(t) = 2t^2 - 3t + 3 \quad \rightarrow \quad v(t) = 4t - 3$$
$$v(0) = 4(0) - 3 = -3 \ \frac{m}{s}$$

c) La velocidad cuando $t = 3$ segundos

$$v(t) = 4t - 3 \quad \rightarrow \quad v(3) = 4(3) - 3 = 9 \ \frac{m}{s}$$

d) La velocidad cuando $t = 5$ segundos

$$v(t) = 4t - 3 \quad \rightarrow \quad v(5) = 4(5) - 3 = 17 \ \frac{m}{s}$$

e) Su aceleración se obtiene mediante la segunda derivada:

$$s(t) = 2t^2 - 3t + 3 \quad \rightarrow \quad s'(t) = 4t - 3 \quad \rightarrow \quad a = s''(t) = 4 \ \frac{m}{s^2}$$

EJERCICIO 44

Resuelve los siguientes problemas:

1. La posición de una partícula se expresa mediante la función $s(t) = 2t^3 - 5t^2 + 10t$, con s en metros y t en segundos. ¿Cuál es su rapidez para $t = 1, \frac{3}{2}, 0$ segundos?
2. La distancia recorrida por un automóvil sobre una carretera en el instante t está dada por $s(t) = 9t^4 - 120t^3 + 432t^2$, ¿en qué intervalos su velocidad media es positiva?
3. La trayectoria de una partícula en movimiento rectilíneo está dada por la función:

$$s(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 2$$

Encuentra:

a) s y a cuando $v = 0$
b) s y v cuando $a = 0$
c) Cuando s aumenta
d) Cuando v aumenta

4. Un proyectil es lanzado con una trayectoria que obedece a la función $s(t) = -3t^2 + 54t$. *a*) Calcula en qué tiempo hace contacto con su objetivo que se encuentra sobre la superficie terrestre y la velocidad que lleva en ese instante. *b*) En qué instante logra su altura máxima y cuál es el valor de esta.
5. Un proyectil es lanzado en dirección a una torre de 36 m de altura. El proyectil sigue la trayectoria de acuerdo con la función $s = -t^2 + 12t$, después de siete segundos. Indica la velocidad y la altura en la que hace contacto el proyectil con la torre.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Razón de cambio

Si una cantidad x está en función del tiempo t, la razón de cambio de x con respecto a t está dada por $\frac{dx}{dt}$. Si dos o más cantidades se relacionan con una ecuación, la razón de cambio de cada cantidad se obtiene derivando la ecuación.

Pasos para resolver problemas de razón de cambio:

- Se traza un dibujo que contemple todas las variables y constantes que intervengan en el problema.
- Se elabora un modelo matemático que relacione las variables.
- Se deriva el modelo matemático respecto al tiempo, se despeja la incógnita a conocer y se sustituyen los datos dados.

EJEMPLOS

Ejemplos

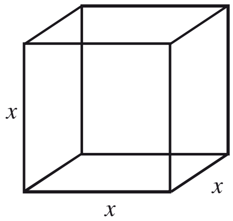
1 Un cubo de hielo de 10 cm^3 de volumen, comienza a derretirse a razón de $6\frac{cm^3}{s}$, ¿cuál es la razón de cambio de la superficie del cubo en ese instante?

Solución

Se construye un cubo de arista x cuyo volumen es $V = 10\ cm^3$ y la razón con la que se derrite es

$$\frac{dV}{dt} = -6\frac{cm^3}{s}$$

(El signo indica que el volumen del cubo está decreciendo.)



Se deriva el volumen $V = x^3$ respecto al tiempo: $\frac{dV}{dt} = 3x^2\frac{dx}{dt}$

$$-6 = 3x^2\frac{dx}{dt} \text{ se despeja } \frac{dx}{dt}$$

$$-\frac{6}{3x^2} = \frac{dx}{dt}$$

La razón con que disminuye la arista es: $\frac{dx}{dt} = -\frac{2}{x^2}$

El área total del cubo es $A = 6x^2$ y la razón con que cambia el área es:

$$\frac{dA}{dt} = 12x\frac{dx}{dt}$$

Pero $\frac{dx}{dt} = -\frac{2}{x^2}$, entonces:

$$\frac{dA}{dt} = 12x\frac{dx}{dt} = 12x\left(-\frac{2}{x^2}\right) = -\frac{24}{x}$$

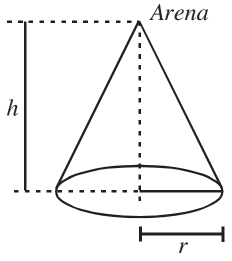
Si el volumen es de 10 $\text{cm}^3 = x^3$, entonces $x = \sqrt[3]{10}$, por tanto:

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{24}{\sqrt[3]{10}}\frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$$

El área disminuye a razón de $\frac{24}{\sqrt[3]{10}}\frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$

2 Se está vaciando arena sobre un montón de forma cónica a razón de $30\frac{\text{m}^3}{\text{min}}$, la altura del cono es siempre igual al radio de su base. ¿Con qué rapidez aumenta su altura cuando el montón tiene tres metros de altura?

Solución



El volumen del cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, pero $r = h$, entonces $V = \frac{1}{3}\pi h^3$ y $\frac{dV}{dt} = 30\frac{m^3}{min}$

Al derivar el volumen respecto del tiempo:

$$\frac{dV}{dt} = \pi h^2\frac{dh}{dt} \quad \text{donde} \quad \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}$$

Al sustituir $\frac{dV}{dt} = 30\frac{\text{m}^3}{\text{min}}$ y $h = 3\text{m}$

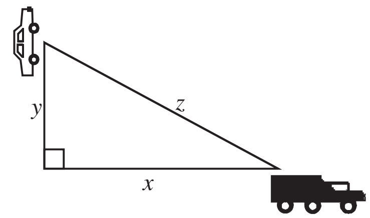
$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi(3)^2}(30) = \frac{30}{9\pi} = \frac{10}{3\pi}$$

Por consiguiente, la altura aumenta a razón de $\frac{10}{3\pi}\frac{\text{m}}{\text{min}}$

3 Un automóvil se dirige al norte de una ciudad a razón de $60\frac{\text{km}}{\text{h}}$, al mismo tiempo un camión se dirige al este de la ciudad a razón de $80\frac{\text{km}}{\text{h}}$. ¿Cuál es la razón con la que varía la distancia entre los vehículos cuando el automóvil y el camión se encuentran a 30 y 40 km, respectivamente, de su punto de partida?

Solución

Se realiza el dibujo con las características establecidas:



Donde,

$$x = 40 \text{ km}, y = 30 \text{ km}; \ \frac{dy}{dt} = 60\frac{\text{km}}{\text{h}}; \ \frac{dx}{dt} = 80\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Se debe encontrar con qué rapidez se separan los vehículos $\left(\frac{dz}{dt}\right)$

La figura representa un triángulo rectángulo, por tanto, se aplica el teorema de Pitágoras para obtener la relación:

$$z^2 = x^2 + y^2$$

Se deriva la expresión respecto al tiempo:

$$\frac{dz^2}{dt} = \frac{dx^2}{dt} + \frac{dy^2}{dt} \quad \rightarrow \quad 2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \quad \text{(simplificando)}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x}{z}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{y}{z}\cdot\frac{dy}{dt}$$

Luego, en el momento en que $x = 40$ km; $y = 30$ km

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = \sqrt{900 + 1600} = \sqrt{2500} = 50 \text{ km}$$

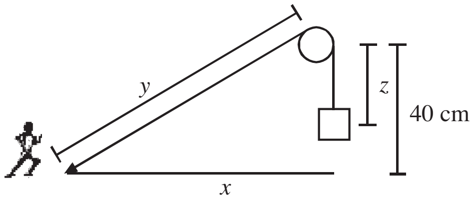
Entonces,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{40 \text{ km}}{50 \text{ km}}\left(80\frac{\text{km}}{\text{h}}\right) + \frac{30 \text{ km}}{50 \text{ km}}\left(60\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(40)(80) + (30)(60)}{50} = \frac{3200 + 1800}{50} = \frac{5000}{50} = 100\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

4 Una persona sostiene un extremo de una cuerda de 150 cm de largo y en el otro extremo cuelga un bloque. La cuerda pasa por una polea que está a 40 cm de altura directamente sobre la mano de la persona, si ésta se aleja de la polea a razón de 10 $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$. ¿Con qué rapidez se eleva el bloque cuando está a 6 cm de la polea?

Solución



La persona se aleja de la polea a $10\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ entonces, $\frac{dx}{dt} = 10\frac{\text{cm}}{\text{s}}$

En la figura, por el teorema de Pitágoras, se tiene:

$$y^2 = x^2 + (40)^2 \quad \rightarrow \quad y^2 = x^2 + 1\,600$$

Luego, la medida de la cuerda está dada por:

$$y + z = 150 \qquad \text{donde,} \qquad y = 150 - z$$

Este resultado se sustituye en $y^2 = x^2 + 1\,600$

$$y^2 = x^2 + 1\,600 \;\rightarrow\; (150 - z)^2 = x^2 + 1\,600$$

Se deriva respecto al tiempo:

$$\frac{d}{dt}(150 - z)^2 = \frac{d}{dt}(x^2 + 1600) \quad \rightarrow \quad 2(z - 150)\left(\frac{dz}{dt}\right) = 2x\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2x}{2(z-150)}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x}{z-150}\frac{dx}{dt}$$

Cuando $z = 6$ cm

$$x^2 + 1\,600 = (150 - z)^2 \;\rightarrow\; x^2 + 1\,600 = (150 - 6)^2$$

$$x^2 + 1\,600 = (144)^2$$

$$x^2 = 20\,736 - 1\,600$$

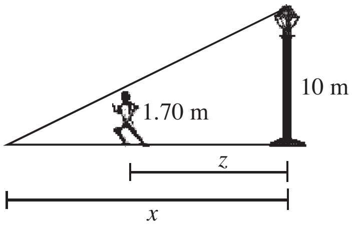
$$x^2 = 19\,136;\; x = \sqrt{19\,136}$$

Por tanto, la razón con la que se eleva el bloque es de:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x}{(z-150)}\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{19\,136}}{6-150}(10) = -\frac{\sqrt{19\,136}}{144}(10) = -\frac{5(8)\sqrt{299}}{72} = -\frac{5\sqrt{299}}{9}\frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

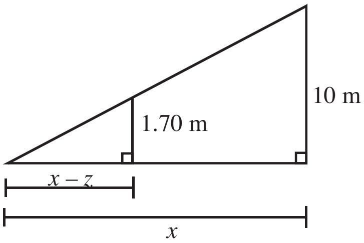
5 Un hombre de 1.70 m de altura se aleja de un poste de alumbrado a razón de 3 m/s, la lámpara del poste está a 10 m de altura. Determina la razón de cambio a la cual se mueve el extremo de la sombra del hombre.

Solución



De acuerdo con la figura $\frac{dz}{dt} = 3\frac{\text{m}}{\text{s}}$ y la incógnita es $\frac{dx}{dt}$

Por triángulos semejantes:



Se obtiene:

$$\frac{10}{1.70} = \frac{x}{x-z} \quad \rightarrow \quad 10(x-z) = 1.70x$$

$$10x - 10z = 1.70x$$

$$10x - 1.70x = 10z$$

$$8.30x = 10z$$

Se deriva la expresión, resultando:

$$8.30\frac{dx}{dt} = 10\frac{dz}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{10}{8.30}\frac{dz}{dt}$$

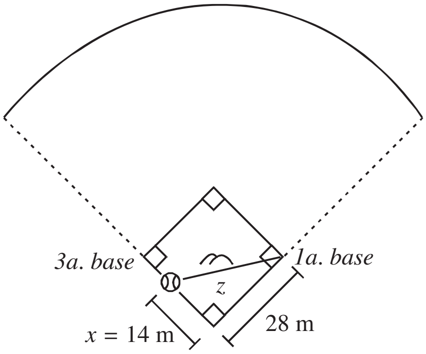
Luego, $\frac{dz}{dt} = 3\frac{\text{m}}{\text{s}}$, entonces,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{10}{8.30}(3) = \frac{30}{8.30} = 3.61\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Finalmente, la razón con que se mueve el extremo de la sombra es de 3.61 m/s.

6 La distancia que existe entre las bases de un campo de béisbol es de 28 m. Si la pelota se batea por la línea en dirección a la tercera base con una velocidad de $32\frac{\text{m}}{\text{s}}$. ¿Con qué rapidez cambia la distancia entre la pelota y la primera base cuando se encuentra a la mitad del camino hacia la tercera base?

Solución



En la figura se observa que:

$$z^2 = x^2 + (28)^2$$

En la cual, al derivar se obtiene:

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = \frac{2x}{2z}\frac{dx}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = \frac{x}{z}\frac{dx}{dt}$$

Luego, cuando x se encuentra a la mitad del recorrido, la distancia de z es:

$$z^2 = (14)^2 + (28)^2 = 196 + 784 \quad \rightarrow \quad z = \sqrt{980} = 14\sqrt{5} \text{ m}$$

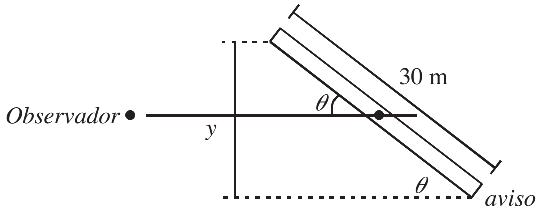
Al sustituir $z = 14\sqrt{5}$, $x = 14$ y $\frac{dx}{dt} = 32\frac{\text{m}}{\text{s}}$ en $\frac{dz}{dt} = \frac{x}{z}\frac{dx}{dt}$, se obtiene:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x}{z}\frac{dx}{dt} = \left(\frac{14}{14\sqrt{5}}\right)(32) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)(32) = \frac{\sqrt{5}}{5}(32)$$

Por consiguiente, la pelota se aleja de la primera base a razón de $\frac{32}{5}\sqrt{5}\frac{\text{m}}{\text{s}}$

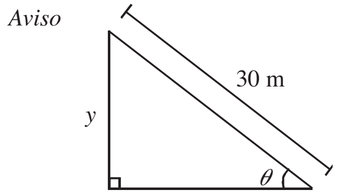
7 Un aviso rectangular que mide 30 m de ancho da vueltas sobre un eje vertical que pasa por el centro del rectángulo a razón de 10 rpm. Una persona que observa a distancia el aviso lo ve como un rectángulo de ancho variable. ¿Con qué rapidez cambia el ancho aparente del aviso cuando éste tiene 12 m de ancho, según lo ve el observador, y su ancho está aumentando?

Solución



Sea y el ancho aparente del aviso, también se sabe que gira a 10 rpm, que es lo mismo que 20π rad/min, entonces se tiene que encontrar la relación que existe entre y y θ.

De la figura:



Se obtiene:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{y}{30} \quad \rightarrow \quad y = 30\,\text{sen}\,\theta$$

Derivando la expresión anterior:

$$\frac{dy}{dt} = 30\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

Luego, cuando $y = 12$ m, entonces:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{y}{30} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

Como el ancho del aviso está aumentando, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, por tanto:

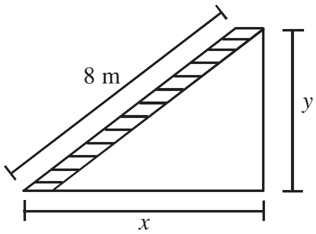
$$\theta = \text{sen}^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = 23.5°$$

$$\frac{dy}{dt} = 30\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = 30\cos(23.5°)(20\pi) = 30(0.9170)(20\pi) = 550.2\pi\frac{\text{m}}{\text{min}}$$

8 Una escalera de 8 m de longitud está apoyada sobre un piso horizontal y contra una pared. Si el extremo inferior de la escalera se aleja del muro a razón de $\frac{3}{2}\frac{\text{m}}{\text{s}}$. ¿Con qué rapidez desciende el extremo superior en el instante en que su altura sobre el suelo es de 3 m?

Solución

Sea y la altura generada por la escalera sobre la pared, x la distancia generada por el extremo inferior y la pared, entonces,



Por el teorema de Pitágoras:

$$(8)^2 = x^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad 64 = x^2 + y^2$$

Se deriva la expresión:

$$\frac{d64}{dt} = \frac{dx^2}{dt} + \frac{dy^2}{dt} \quad \rightarrow \quad 0 = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

Se despeja $\frac{dy}{dt}$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{2x}{2y}\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

Cuando $y = 3$, el valor de x está determinado por:

$$(8)^2 = x^2 + (3)^2 \qquad 64 = x^2 + 9$$

$$64 - 9 = x^2$$

$$x = \sqrt{55}$$

Por tanto,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-x}{y}\frac{dx}{dt} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{-\sqrt{55}}{3}\left(\frac{3}{2}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\sqrt{55}}{2}\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

El signo menos indica que la altura sobre la pared está decreciendo.

EJERCICIO 45

1. Si la altura de un determinado árbol es de $10\sqrt{2}\,r^{\frac{3}{2}}$ cm, donde r es el radio de la parte transversal del tronco del árbol. Si el radio aumenta a razón de $\frac{1}{6}\frac{\text{cm}}{\text{año}}$, ¿con qué rapidez cambia la altura cuando su radio es de 5 cm?
2. Un náufrago es remolcado hacia un barco con un cable. La proa de donde se jala el cable se encuentra a 7 m del nivel del mar y el cable es jalado a razón de $12\frac{\text{m}}{\text{min}}$. ¿Con qué rapidez se está moviendo el náufrago hacia el barco cuando se encuentra a 20 m de la base del barco?
3. Un automóvil que viaja a $80\frac{\text{m}}{\text{s}}$ cruza un puente sobre un río, 20 segundos antes de que un bote que viaja a $40\frac{\text{m}}{\text{s}}$ pase por debajo del puente. Vistos desde arriba, el río y el puente forman un ángulo recto. ¿Con qué rapidez se están separando el automóvil y el bote 20 segundos después de que el bote pasa por debajo del puente?
4. Un globo de forma esférica, se infla a razón de $0.16\frac{\text{m}^3}{\text{min}}$. ¿Cuál es el volumen del globo cuando su radio está aumentando a razón de $0.20\frac{\text{m}}{\text{min}}$?
5. Una escalera de 13 m de largo está apoyada sobre una pared. Encuentra la rapidez con que baja el extremo superior de la escalera, cuando su extremo inferior dista 5 m del muro y se separa a razón de $5\frac{\text{m}}{\text{s}}$
6. Al caer una piedra a un estanque de aguas tranquilas forma una onda circular, cuyo radio aumenta a razón de $1\frac{\text{cm}}{\text{s}}$. ¿Con qué rapidez aumenta el área encerrada por la onda cuando el radio es de 5 cm?
7. Un tanque cilíndrico de 7 m de radio y 10 m de altura se llena de agua. Se hace un agujero en el fondo del tanque, en ese momento el agua sale a razón de $3\frac{\text{m}^3}{\text{min}}$. ¿A qué rapidez está cambiando la altura del líquido en el tanque?
8. Un satélite se mueve en una órbita elíptica alrededor de un planeta. La ecuación de su órbita plana es de $9x^2 + 16y^2 = 144$. Si la rapidez del satélite en una dirección x es de $15\frac{\text{km}}{\text{h}}$, cuando la coordenada x es de $\frac{36}{\sqrt{137}}$ km. ¿Cuál es la rapidez en la dirección y en ese instante?
9. Los automóviles A y B salen del mismo punto. El automóvil A viaja hacia el este a razón de $80\frac{\text{km}}{\text{h}}$ y el automóvil B viaja hacia el norte a $60\frac{\text{km}}{\text{h}}$. A qué razón está cambiando la distancia entre los dos a las 14:00 horas, si:
   a) *A* y *B* salen a las 12:00 a.m.
   b) *A* sale a las 12 del día y *B* sale a la 13:00 horas.
10. Se está vaciando un depósito cónico de 1.5 m de radio y 5 m de altura, a razón de $0.16\frac{\text{m}^3}{\text{min}}$. ¿Cómo está bajando el nivel cuando la profundidad del agua es de 2 m?
11. En un crucero un camión sale a las 10:00 horas y viaja hacia el oeste a 60 km/h. Un automóvil sale a las 13:00 horas del mismo lugar y viaja hacia el norte a 80 km/h. ¿A qué razón se están separando a las 15:00 horas?
12. Un globo asciende sobre un punto a razón de $6\frac{\text{m}}{\text{s}}$; un observador está situado a 300 m del punto de despegue del globo. Cuando el globo está a 400 m de altura, ¿con qué rapidez está cambiando la distancia entre el globo y el observador?
13. Se inyecta gas a un globo esférico a razón de $7\frac{\text{pies}^3}{\text{min}}$. Si la presión se mantiene constante. ¿Con qué rapidez cambia el radio cuando éste es de 1 pie?

14. El área de un triángulo equilátero disminuye a razón de $6\frac{\text{cm}^2}{\text{min}}$. Calcula la rapidez de cambio de la longitud de sus lados en el momento en que el área del triángulo es de 100 cm^2.
15. Un punto se mueve sobre la parábola semicúbica $y^2 = x^3$ de tal manera que su ordenada aumenta siete unidades por segundo. Cuando $y = 1$, ¿con qué rapidez cambia su abscisa?
16. Una persona está de pie en un muelle y jala una lancha por medio de una cuerda. Sus manos están a 2 m por encima del amarre de la lancha. Si la persona jala la cuerda a razón de $70\frac{\text{cm}}{\text{s}}$. ¿Con qué rapidez se aproxima la lancha al muelle cuando se encuentra a 5 m de él?
17. Un hombre de 1.80 m de estatura camina en línea recta a $1.5\frac{\text{m}}{\text{s}}$ alejándose de un faro que se encuentra a 8 metros de altura sobre el suelo. ¿Con qué rapidez se mueve el extremo de su sombra?, ¿Cuál es la rapidez con la que cambia la longitud de su sombra?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Aplicaciones a la economía

Sea x el número total de unidades producidas por una empresa y m el precio de venta por unidad, el ingreso se obtiene con la función:

$$I(x) = mx$$

Si el precio de venta depende linealmente del número de unidades producidas, $m = ax + b$, la función de ingreso se expresa como:

$$I(x) = mx \quad \rightarrow \quad I(x) = (ax + b)x \quad \rightarrow \quad I(x) = ax^2 + bx$$

Sea $C(x)$ el costo de producir x unidades, la utilidad de la empresa se expresa:

$$U(x) = I(x) - C(x)$$

Y el costo medio por unidad está dado por la expresión:

$$Q(x) = \frac{C(x)}{x}$$

Otra forma de expresar la función de costo puede ser:

$$C = \text{costos variables} + \text{costos fijos}$$

Por ejemplo, si se tiene la función $C(x) = 4x^2 + 6x + 850$, los costos fijos son el término independiente de la función, es decir, 850, al ser x el número de unidades, entonces $x \geq 0$ por consiguiente, el costo fijo de producción es $C(0) = 850$.

Ejemplo

Las funciones de ingreso y costo son $I(x) = -2x^2 + 340x$ y $C(x) = 3x^2 + 600$. Determina la utilidad máxima y el costo mínimo en pesos.

Solución

La utilidad $U(x) = I(x) - C(x),\ x \geq 0$

$$U(x) = (-2x^2 + 340x) - (3x^2 + 600)$$

$$U(x) = -2x^2 + 340x - 3x^2 - 600$$

$$U(x) = -5x^2 + 340x - 600$$

Se obtiene la derivada de la función de la utilidad:

$$U'(x) = -10x + 340$$

Se obtiene el valor crítico haciendo $U'(x) = 0$

$$-10x + 340 = 0$$

$$-10x = -340$$

$$x = \frac{-340}{-10} = 34$$

Se evalúa $x = 34$ en la segunda derivada para verificar si existe un valor máximo.

$$U''(x) = -10$$

$$U''(34) = -10 < 0$$

Entonces para $x = 34$ existe un valor máximo.
Por consiguiente, se necesita producir 34 unidades para obtener una utilidad máxima, la cual es de:

$$U(34) = -5(34)^2 + 340(34) - 600 = 5180$$

Por tanto, la utilidad máxima es de \$5 180.00
Por otro lado el costo medio está dado por:

$$Q(x) = \frac{C(x)}{x}$$

$$Q(x) = \frac{3x^2 + 600}{x}$$

$$Q(x) = 3x + \frac{600}{x}$$

Se obtiene la derivada de la función de costo medio

$$Q'(x) = 3 - \frac{600}{x^2}$$

Se obtiene el valor crítico haciendo $Q'(x) = 0$

$$3 - \frac{600}{x^2} = 0$$

$$3x^2 - 600 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{200}$$

$$x = \pm 10\sqrt{2}$$

Se verifica que sea el valor mínimo, esto se obtiene evaluando el valor crítico en la segunda derivada

$$Q''(x) = \frac{1200}{x^3}$$

$$Q''\left(10\sqrt{2}\right) = \frac{1200}{\left(10\sqrt{2}\right)^3} = \frac{1200}{(200)\left(10\sqrt{2}\right)} = \frac{3}{5\sqrt{2}} > 0$$

Entonces, para $x = 10\sqrt{2} \approx 14$, hay un valor mínimo.

Para determinar el costo medio mínimo de forma aproximada se sustituye el valor crítico en la función de costo medio:

$$Q(x) = 3(14) + \frac{600}{14}$$

$$Q(x) = 42 + 42.86$$

$$Q(x) = 84.86$$

Por tanto, el costo mínimo aproximado es de $84.86

Costo marginal

Si $C(x)$ es la función de costo total que tiene una empresa por producir x unidades de algún artículo y la empresa incrementa el número de unidades de x_0 a x_1 ($x_0 < x_1$), el costo se incrementa $C(x_1) - C(x_0)$, la razón de cambio del costo es:

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_1) - C(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{C(x_0 + \Delta x) - C(x_0)}{\Delta x}$$

En economía, la expresión $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{C(x_0 + \Delta x) - C(x_0)}{\Delta x}$ es la derivada de la función de costo total y recibe el nombre de costo marginal $C'(x)$ y representa el incremento del costo al incrementar la producción.

Para $\Delta x = 1$ y x_0 suficientemente grande (tan grande que Δx sea pequeño respecto a x_0) se tiene que:

$$C'(x_0) \approx C(x_0 + 1) - C(x_0)$$

Luego, el costo de producir $x_0 + 1$ unidades es aproximadamente el mismo de producir x_0 unidades.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Una empresa estima que el costo (en pesos) por producir x artículos es de:

$$C(x) = 0.02x^2 + 3x + 12\,000$$

Determina el costo marginal en un nivel de producción de 600 artículos y el costo real de producir el 601ésimo artículo.

Solución

Se obtiene la función del costo marginal:

$$C'(x) = 0.04x + 3$$

El costo marginal aproximado para 600 artículos es:

$$C'(600) = 0.04(600) + 3 = 27$$

Por tanto, el costo marginal aproximado por artículo es de \$27.00

El costo real de producción del 601ésimo artículo es:

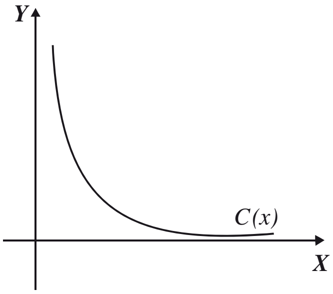
$$C(601) - C(600) = [0.02(601)^2 + 3(601) + 12\,000] - [0.02(600)^2 + 3(600) + 12\,000]$$

$$C(601) - C(600) = 21\,027.02 - 21\,000$$

$$C(601) - C(600) = 27.02$$

Se observa que $27 \approx 27.02$, es decir $C'(600) \approx C(600 + 1) - C(600)$, lo cual se había indicado antes.

El costo por unidad está dado por la función de costo promedio $Q(x) = \dfrac{C(x)}{x}$. Si se toma una función característica de costo promedio ésta podría ser:



Dicha función tiene un punto crítico, si se localiza este punto se tendrá el costo mínimo.

Al derivar $Q(x)$ se obtiene:

$$Q'(x) = \frac{xC'(x) - C(x)}{x^2}$$

Se iguala con cero $Q'(x)$, para obtener el valor $C'(x)$

$$\frac{xC'(x) - C(x)}{x^2} = 0$$

$$xC'(x) - C(x) = 0$$

$$xC'(x) = C(x)$$

$$C'(x) = \frac{C(x)}{x}$$

Pero $Q(x) = \dfrac{C(x)}{x}$, entonces, $C'(x) = Q(x)$

Es decir, cuando el costo promedio es mínimo se tiene que es igual al costo marginal. Lo anterior conlleva al hecho de que si el costo marginal es menor que el costo promedio, entonces se debe producir más para disminuir el costo promedio y viceversa, si el costo marginal es mayor que el costo promedio se tendrá que producir menos para que el costo promedio baje.

2 El costo (en pesos) estimado para producir x artículos está dado por la función:

$$C(x) = 0.002x^2 + 2x + 3\,000$$

Determina el costo promedio y el costo marginal de producir 1 200 artículos y calcula el nivel de producción para el cual el costo promedio es el más bajo y cuál es dicho costo.

Solución

El costo promedio está dado por la fórmula $Q(x) = \frac{C(x)}{x}$, entonces:

$$Q(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{0.002x^2 + 2x + 3\,000}{x} \quad \rightarrow \quad Q(x) = 0.002x + 2 + \frac{3\,000}{x}$$

Se evalúa $x = 1\,200$

$$Q(1\,200) = 0.002(1\,200) + 2 + \frac{3\,000}{1\,200}$$

Por tanto, el costo promedio de producir 1 200 artículos es de $6.90

Para obtener el costo marginal se determina $C'(x)$ y se evalúa $x = 1\,200$

$$C'(x) = 0.004x + 2$$

$$C'(1\,200) = 0.004(1\,200) + 2 = 6.8$$

Por tanto, el costo marginal de producir 1 200 artículos es de $6.80

El costo promedio se minimiza cuando es igual al costo marginal.

$$C'(x) = Q(x) \quad \rightarrow \quad 0.004x + 2 = 0.002x + 2 + \frac{3\,000}{x} \quad \rightarrow \quad 0.004x = 0.002x + \frac{3\,000}{x}$$

$$\rightarrow \quad 0.002x = \frac{3\,000}{x} \quad \rightarrow \quad 0.002x^2 = 300$$

$$x^2 = \frac{3\,000}{0.002}$$

$$x = \sqrt{\frac{3\,000}{0.002}} \approx 1\,225$$

Para mostrar que $x = 1\,225$, se obtiene un mínimo, se determina $Q''(x)$ y se evalúa:

$$Q(x) = 0.002x + 2 + \frac{3\,000}{x} \quad \rightarrow \quad Q'(x) = 0.002 - \frac{3\,000}{x^2}$$

$$Q''(x) = \frac{6\,000}{x^3}$$

$$Q''(1225) = \frac{3\,000}{(1\,225)^3} > 0$$

Por tanto, para $x = 1\,225$ hay un mínimo.

El costo promedio se obtiene evaluando $x = 1\,225$ en $Q(x)$.

$$Q(x) = 0.002x + 2 + \frac{3\,000}{x} \qquad Q(1\,225) = 0.002(1\,225) + 2 + \frac{3\,000}{1\,225} = 6.89$$

Finalmente, el costo promedio mínimo por artículo es de $6.89 ≈ $7.00

De la misma forma existen funciones marginales para el ingreso y la utilidad, en los dos casos es la derivada de cada función.

$$\text{Ingreso marginal} = I'(x)$$

$$\text{Utilidad marginal} = U'(x)$$

Ejemplo

Una empresa estima su ingreso y costo (en pesos) con las funciones $I(x) = -2x^2 + 340x$ y $C(x) = 3x^2 + 6\,000$, respectivamente. Determina el ingreso obtenido al producir la vigésima primera unidad y aproxima dicho valor con el ingreso marginal.

Solución

Se evalúan $x = 20$ y $x = 21$ en la función de ingresos:

$$I(20) = -2(20)^2 + 340(20) = 6\,000$$

$$I(21) = -2(21)^2 + 340(21) = 6\,258$$

El valor de la vigésima primera unidad es:

$$I(21) - I(20) = 6\,258 - 6\,000 = 258$$

Si se obtiene con el concepto ingreso marginal, se deriva $I(x)$ y se evalúa $x = 20$

$$I'(x) = -4x + 340$$

$$I'(20) = -4(20) + 340 = 260$$

En el comparativo se observa que el ingreso marginal da un valor muy aproximado a 258 que es el ingreso real de la vigésima unidad.

EJERCICIO 46

1. Dadas las funciones de ingreso y costo, $I(x)$ y $C(x)$ respectivamente, determina el ingreso máximo, la utilidad máxima y el costo medio mínimo:

   a) $I(x) = -x^2 + 300x$ y $C(x) = x^2 + 40x + 80$

   b) $I(x) = x(400 - 4x)$ y $C(x) = x^2 + 20x + 12$

Resuelve los siguientes problemas:

2. El costo estimado para producir x artículos está dado por la función:

   $$C(x) = 0.004x^2 + 5x + 6\,000$$

   Determina el costo promedio y el costo marginal de producir 2 000 artículos y calcula el nivel de producción para el cual el costo promedio es el más bajo y cuál es dicho costo.
3. Una empresa estima su ingreso y costo con las funciones $I(x) = -4x^2 + 400x$ y $C(x) = 2x^2 + 300$ respectivamente. Determina el ingreso obtenido al producir la trigésima primera unidad y aproxima dicho valor con el ingreso marginal.
4. Una empresa de telas estima que el costo para producir x metros de tela es $C(x) = 0.001x^3 - 0.2x^2 + 24x + 2\,400$ y que al vender x metros cobraría $p(x) = 58 - 0.00042x$ por metro. Determina el nivel de producción para obtener una utilidad máxima.
   Ingreso sugerido: $I(x) = p(x) \cdot x$
5. Un estadio de futbol tiene una capacidad para 60 000 espectadores. El promedio de asistencia fue de 32 000 espectadores, teniendo los boletos un costo de \$60.00 por persona, la gerencia decide bajar el precio por boleto a \$40.00, teniendo un promedio de 48 000 espectadores. Determina la función lineal de demanda $p(x)$ y calcula el precio por boleto para minimizar el ingreso.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Regla de L'Hôpital

Sean f y g dos funciones derivables con $g'(x) \neq 0$ cerca de a (incluso en a)

Si

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

o

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

y para $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, tenemos una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

Entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

A esto le llamamos regla de L'Hôpital, la cual nos dice que el límite de un cociente de dos funciones es igual al límite del cociente de las derivadas de dichas funciones.

Esta regla es válida para los límites laterales ($x \to a^+$ o $x \to a^-$) y los límites al infinito ($x \to \infty$ o $x \to -\infty$)

- **Indeterminación $\frac{0}{0}$**

Ejemplo

Obtén $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

Solución

Al evaluar se obtiene la indeterminación $\frac{0}{0}$ y utilizando la regla se obtiene:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{3^2 - 9}{3 - 3} = \frac{0}{0} \qquad \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{d}{dx}(x^2 - 9)}{\frac{d}{dx}(x - 3)} = \lim_{x \to 3} \frac{2x}{1} = \frac{2(3)}{1} = 6$$

- **Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$**

Ejemplo

¿Cuál es el valor de $\lim_{x \to \infty} \frac{3x}{e^{x-1}}$?

Solución

Al evaluar se obtiene $\frac{\infty}{\infty}$, se aplica la regla y se obtiene:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x}{e^{x-1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{3}{e^{x-1}} = \frac{3}{\infty} = 0$$

- **Indeterminación $0 \cdot \infty$**

Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, para $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x)$ tenemos una indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$. Entonces podemos utilizar la regla de L'Hôpital transformando el producto de la siguiente forma

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{o} \quad f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

Ejemplo

Determina $\lim_{x \to 0^+} x^2 \ln x$

Solución

Al evaluar se obtiene

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \to 0^+} x^2 \cdot \lim_{x \to 0^+} \ln x = 0 \cdot (-\infty)$$

Para resolver el límite, se escribe

$$x^2 \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}$$

de tal forma que:

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \;\; ; \;\; \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^3}$$

Entonces:

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \to 0^+}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x \to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}\right) = \lim_{x \to 0^+}\left(-\frac{x^3}{2x}\right) = \lim_{x \to 0^+}\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0$$

Ejemplo

Obtén la solución de $\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{x}\right)\tan x$

Solución

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{x}\right)\tan x = \left(\frac{1}{0}\right)\left(\tan(0)\right) = \infty \cdot 0$$

Al aplicar la regla:

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{x}\right)\tan x = \lim_{x \to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0}\frac{\sec^2 x}{1} = \frac{\sec^2 0}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

Indeterminación: $\infty - \infty$

Cuando se obtienen diferencias indeterminadas del tipo $\infty - \infty$ para $\lim_{x \to a}(f(x) - g(x))$, siendo $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, se utiliza la regla de L'Hôpital transformando (si es posible) la diferencia a un cociente.

Ejemplo

Calcula el resultado del $\lim_{x \to 0}\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right)$

Solución

$$\lim_{x \to 0}\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right) = \infty - \infty$$

Se aplica la regla y se calcula el límite:

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{-x \operatorname{sen} x + \cos x - \cos x}{x\cos x + \operatorname{sen} x}\right) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{-x \operatorname{sen} x}{x\cos x + \operatorname{sen} x}\right) = \frac{-0 \operatorname{sen} 0}{0\cos 0 + \operatorname{sen} 0} = \frac{0}{0}$$

Se observa que el resultado es $\frac{0}{0}$, por consiguiente, se utiliza de nuevo la regla:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-x\cos x-\text{sen }x}{2\cos x-x\text{ sen }x}\right)$$

Al evaluar nuevamente se obtiene:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-x\cos x-\text{sen }x}{2\cos x-x\text{ sen }x}\right)=\frac{-0\cos 0-\text{sen }0}{2\cos 0-0\text{ sen }0}=\frac{0}{2}=0\text{ , entonces, }\lim_{x\to 0}\left[\text{ctg }x-\frac{1}{x}\right]=0$$

Indeterminaciones del tipo $0°$, $\infty°$ y 1^{∞}

Para $\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$ se pueden obtener las siguientes formas indeterminadas:

- Si $\lim_{x\to a} f(x)=0$ y $\lim_{x\to a} g(x)=0$ entonces se obtiene una indeterminación del tipo $0°$
- Si $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x)=0$ entonces se obtiene una indeterminación del tipo $\infty°$
- Si $\lim_{x\to a} f(x)=1$ y $\lim_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ se obtiene una indeterminación del tipo 1^{∞}

Para estos casos se puede aplicar el logaritmo natural en $y=[f(x)]^{g(x)}$ y aplicar la propiedad $\ln b^n = n\ln b$, es decir:

Sea $y=[f(x)]^{g(x)}$ entonces:

$$\ln y=\ln[f(x)]^{g(x)}$$

$$\ln y=g(x)\ln f(x)$$

De tal forma que esta transformación nos lleva a un producto indeterminado $g(x)\ln f(x)$ el cual es del tipo $0\cdot\infty$

Por otro lado también se puede utilizar la transformación: $[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$

Ejemplo

Obtén el resultado de $\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^x$

Solución

Al resolver directamente

$$\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^x=0^0$$

se obtiene la indeterminación $0°$ sea $y=(\cot x)^x$, aplicando el logaritmo natural en ambos lados se obtiene

$$\ln y=\ln(\cot x)^x$$

Aplicamos la propiedad $\ln b^n = n\ln b$ y se tiene:

$$\ln y=x\ln\cot x$$

Calculamos el límite para $\ln y$ y se transforma el producto

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y=\lim_{x\to 0^+}x\ln\cot x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\cot x}{\frac{1}{x}}$$

Se aplica la regla de L´Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\cot x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{1}{\cot x}\right)(-\csc^2 x)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\tan x)\left(-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right)}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)\left(-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}-\frac{\frac{1}{\operatorname{sen} x\cos x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{\operatorname{sen} x\cos x}=\frac{0}{0}$$

Se obtiene la indeterminación $\frac{0}{0}$, entonces se utiliza la identidad $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x=\operatorname{sen} x\cos x$ y se aplica L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{\operatorname{sen} x\cos x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x^2}{\operatorname{sen} 2x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{4x}{2\cos 2x}=\frac{4(0)}{2\cos 2(0)}=\frac{0}{2\cos 0}=\frac{0}{2}=0$$

por tanto $\lim_{x\to 0^+}\ln y=0$

Pero queremos el límite de y, entonces partiendo de la propiedad $e^{\ln b}=b$ se escribe $y=e^{\ln y}$
Entonces

$$\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^x=\lim_{x\to 0^+}y=\lim_{x\to 0^+}e^{\ln y}=e^0=1$$

Por tanto $\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^x=1$

Ejemplo

¿Cuál es el resultado de $\lim_{x\to 0^+}(1-\cos x)^{\tan x}$?

Solución

Sea $y=(1-\cos x)^{\tan x}$, aplicando logaritmo natural en ambos lados se obtiene:

$$\ln y=\ln(1-\cos x)^{\tan x}$$

$$\ln y=(\tan x)\ln(1-\cos x)$$

$$\ln y=\frac{1}{\cot x}\ln(1-\cos x)$$

$$\ln y=\frac{\ln(1-\cos x)}{\cot x}$$

Aplicando el límite y luego la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-\cos x)}{\cot x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\dfrac{1}{1-\cos x}\right)(\operatorname{sen} x)}{-\csc^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}}{-\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x\to 0} -\frac{\operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x}{1-\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left[-\frac{(1-\cos^2 x)\operatorname{sen} x}{1-\cos x}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left[-\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)\operatorname{sen} x}{1-\cos x}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} [-(1+\cos x)\operatorname{sen} x] = -(1+\cos(0))\operatorname{sen}(0)$$

$$= -(1+1)(0) = -(2)(0) = 0$$

Por tanto $\lim_{x\to 0^+} \ln y = 0$ pero se quiere el límite de y, entonces sea $y = e^{\ln y}$, entonces

$$\lim_{x\to 0^+} (1-\cos x)^{\tan x} = \lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^0 = 1$$

por tanto $\lim_{x\to 0^+} (1-\cos x)^{\tan x} = 1$

Ejemplo

Determina $\lim_{x\to 0^+} (1-2x)^{\frac{1}{x}}$

Solución

Al sustituir directamente se obtiene:

$$\lim_{x\to 0^+} (1-2x)^{\frac{1}{x}} = 1^{\infty}$$

sea $y = (1-2x)^{\frac{1}{x}}$, al aplicar logaritmo natural

$$\ln y = \ln(1-2x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\ln y = \frac{1}{x}\ln(1-2x)$$

$$\ln y = \frac{\ln(1-2x)}{x}$$

Se obtiene el límite de ln y y se aplica L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-2x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\dfrac{2}{1-2x}}{1} = \lim_{x\to 0^+} \left[-\frac{2}{1-2x}\right] = -\frac{2}{1-2(0)} = -\frac{2}{1} = -2$$

Por tanto $\lim_{x\to 0^+} \ln y = -2$

Para calcular el límite de y hacemos $y = e^{\ln y}$, entonces

$$\lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

Por tanto

$$\lim_{x\to 0^+} (1-2x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e^2}$$

EJERCICIO **47**

Obtén los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to 5} \frac{x^3 - 125}{x^2 - 25}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$
3. $\lim_{x\to 2} \frac{\ln(3-x)}{x-2}$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{4^x - 2^x}{3x}$
5. $\lim_{x\to 0} (\tan x)^x$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{2x^2}$
7. $\lim_{x\to 0} (\sec x)^{\frac{1}{x}}$
8. $\lim_{x\to 0} (x \csc 3x)$
9. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{\tan x}$
10. $\lim_{x\to \infty} \frac{\ln(2x+1) - \ln(x+2)}{x}$
11. $\lim_{x\to \infty} \frac{2x + \ln x}{2x - \ln x}$
12. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \operatorname{sen} 2x - 1}{\ln(1+2x)}$
13. $\lim_{x\to 0} \left(1 - \operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$
14. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{3x} - \frac{1}{\operatorname{sen} 3x}\right)$
15. $\lim_{x\to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
16. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan x - x}{x^3}\right)$
17. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\tan x$
18. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)\ln\left(\frac{3x+2}{x+2}\right)$
19. $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$
20. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Teorema de Rolle

Definición

Sea $f(x)$ una función que satisface las siguientes condiciones:

1. Es continua en el intervalo $[a, b]$.
2. Es derivable en el intervalo (a, b).
3. $f(a) = f(b) = 0$
4. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Verifica el teorema de Rolle para la función $f(x) = x^2 - x - 6$ en el intervalo $[-2, 3]$ y determina el valor de c en dicho intervalo.

Solución

1. $f(x)$ es una función polinomial, por tanto, es continua en todos los números reales, en particular en el intervalo $[-2, 3]$
2. La derivada de $f(x)$ es $f'(x) = 2x - 1$; $f'(x)$ es definida en los números reales, en particular está definida en el intervalo $(-2, 3)$ y es continua.
3. $f(-2) = (-2)^2 - (-2) - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$; $f(3) = (3)^2 - (3) - 6 = 9 - 3 - 6 = 0$
4. Por tanto, $f(x)$ satisface el teorema de Rolle.

Para obtener el valor de c se emplea:

$$f'(c) = 0 \quad \rightarrow \quad 2c - 1 = 0$$

Se resuelve la última ecuación y se obtiene:

$$c = \frac{1}{2} \text{ y } \frac{1}{2} \in (-2, 3)$$

2 Verifica si la función $f(x)=x^3-5x^2+2x+8$ satisface el teorema de Rolle en los intervalos $[-1, 2]$, $[2, 5]$ y encuentra los respectivos valores de c en estos intervalos.

Solución

1. $f(x)$ es una función polinomial, por tanto, es continua en toda la recta real y en consecuencia es continua en los intervalos propuestos.
2. La derivada de $f(x)$ es $f'(x) = 3x^2 - 10x + 2$; esta función es continua en los intervalos $(-1, 2)$ y $(2, 5)$ por ser una función polinomial.
3. Para el intervalo $[-1, 2]$

   $f(-1) = (-1)^3 - 5(-1)^2 + 2(-1) + 8 = -1 - 5 - 2 + 8 = 0$

   $f(2) = (2)^3 - 5(2)^2 + 2(2) + 8 = 8 - 20 + 4 + 8 = 0$

   $f(-1) = f(2)$

   El teorema de Rolle se cumple para este intervalo.
   Para el intervalo $[2, 5]$

   $f(2) = 0$

   $f(5) = (5)^3 - 5(5)^2 + 2(5) + 8 = 125 - 125 + 10 + 8 = 18$

   $f(2) \neq f(5)$

   En este intervalo no se satisface el teorema de Rolle.
4. Se buscan los valores posibles de c en el intervalo $[-1, 2]$:

$$f'(c) = 0 \quad \rightarrow \quad 3c^2 - 10c + 2 = 0$$

Se resuelve la ecuación cuadrática para obtener los valores de c,

$$c = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)}$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{100-24}}{6}$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{76}}{6}$$

$$= \frac{10 \pm 8.717}{6}$$

$$c = 3.119$$

$$c = 0.213$$

EJERCICIO 48

Verifica el teorema de Rolle en los intervalos indicados y halla los posibles valores de c para las siguientes funciones:

1. $f(x) = x^2 - 4$; $[-2, 2]$
2. $f(x) = 2x^2 - 3x$; $\left[0, \frac{3}{2}\right]$
3. $f(x) = x^2 - 5x + 6$; $[2, 3]$

4. $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$; $\left[-3, -\frac{1}{2}\right]$ y $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$

5. $f(x) = x^3 - 9x$; $[-3,0]$ y $[0,2]$

6. $f(x) = x^3 + 5x^2 - 4x - 20$; $[-2, 2]$

7. $f(x) = x^3 - 13x + 12$; $[-4,1]$ y $[1,3]$

8. $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$; $[-5,0]$, $[-5,5]$ y $[0,5]$

9. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^4 + 1}$; $[-2,0]$, $[-2,2]$ y $[0,2]$

10. $f(x) = \cos x$; $[-\pi, \pi]$ y $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

11. $g(x) = \begin{cases} 4 - x^2 \\ 8 - 5x \end{cases}$; si $\begin{matrix} x < 1 \\ x > 1 \end{matrix}$; $\left[-2, \frac{8}{3}\right]$

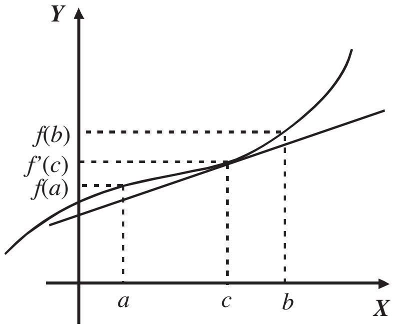
12. $h(x) = x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{4}}$; $[0,16]$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Teorema del valor medio

Dada una función $f(x)$ tal que:

1. $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$
2. $f(x)$ es diferenciable en el intervalo (a, b)
3. Entonces existe un número $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$



EJEMPLOS

Ejemplos

1 Verifica que la función $f(x) = x^2 - 4$ satisfaga el teorema del valor medio en el intervalo $[-1, 3]$ y encuentra el valor de c.

Solución

1. $f(x)$ es continua en $[-1, 3]$, ya que está definida en todos los puntos de este intervalo.
2. Como $f(x)$ es una función polinomial, entonces es continua y diferenciable en el intervalo $(-1, 3)$, $f'(x) = 2x$
3. Para buscar a c se sustituye en la fórmula:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)}$$

$$2c = \frac{5 - (-3)}{4}$$

$$c = \frac{8}{8} = 1$$

Por tanto, el valor de c es igual a 1.

2 Verifica si la función $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ satisface el teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$ y calcula el valor de c.

Solución

1. $f(x)$ es una función polinomial, entonces $f(x)$ es continua en todos los puntos del intervalo $[0, 2]$
2. Al ser $f(x)$ continua en el intervalo $[0, 2]$ entonces es derivable en el intervalo $(0, 2)$ y $f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$, aplicando el teorema del valor medio se obtiene el valor de c.

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} \quad \rightarrow \quad 3c^2 + 2c - 2 = \frac{8 - 0}{2}$$

$$3c^2 + 2c - 2 = 4$$

$$3c^2 + 2c - 6 = 0$$

Al resolver la ecuación para c:

$$c = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(3)(-6)}}{2(3)} = \frac{-2 \pm \sqrt{76}}{6} = \begin{cases} c = 1.12 \\ c = -1.78 \end{cases}$$

El valor de c que pertenece al intervalo $(0, 2)$ es $c = 1.12$

3 Verifica si la función $f(x) = x^2 + 5x + 4$, satisface el teorema del valor medio en el intervalo [1, 3] y determina el valor de c.

Solución

1. La función es continua en el intervalo [1, 3], ya que está definida en todos los puntos del intervalo.
2. La función es polinomial y continua en el intervalo [1, 3] entonces, es diferenciable en ese intervalo $f'(x) = 2x + 5$
3. Para encontrar c se aplica la fórmula: $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$2c + 5 = \frac{f(3)-f(1)}{3-1}; \qquad 2c + 5 = \frac{28-10}{3-1}$$

$$2c + 5 = 9$$

$$2c = 4$$

$$c = 2$$

EJERCICIO 49

Verifica el teorema del valor medio para las siguientes funciones en los intervalos indicados y determina el valor adecuado de c.

1. $f(x) = x^2 - 3x + 2$; [0, 3]
2. $f(x) = 4 + x^2$; [−1, 2]
3. $f(x) = \dfrac{1}{x}$; [1, 3]
4. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$; [−2, 1]
5. $f(x) = \sqrt{x+1}$; [0, 8]
6. $f(x) = x^3 + 5x$; [−2, 1]
7. $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{x}{2}$; $[-\pi, \pi]$
8. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$; [0, 7]
9. $f(x) = e^x$; [0, 1]
10. $f(x) = \ln(2x + 1)$; [0, 4]

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Diferenciales

Se define la diferencial de una función f en un punto x, como el producto de su derivada por la diferencial de la variable independiente y se denota por las expresiones $df(x)$ o dy, es decir:

$$df(x) = f'(x)dx \text{ o } dy = \frac{dy}{dx}dx \text{ ; para toda } dx \neq 0$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén la diferencial de la función $y = x^2 - 5x + 6$

Solución

Se obtiene la derivada y se multiplica por dx:

$$dy = \frac{d}{dx}(x^2 - 5x + 6)\cdot dx$$

$$dy = (2x - 5)dx$$

Por tanto, la diferencial es: $dy = (2x - 5)dx$

2 Determina la diferencial de la función $y = \sqrt{x^2 - 5}$

Solución

Se deriva la función:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\sqrt{x^2-5}}{dx} = \frac{1}{2}(x^2-5)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d(x^2-5)}{dx} = \frac{1}{2}(x^2-5)^{-\frac{1}{2}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-5}}$$

Por consiguiente,

$$dy = \frac{x}{\sqrt{x^2-5}}\,dx$$

3 Obtén la diferencial de la función $f(\theta) = 2 \text{ sen } \theta \cos \theta$

Solución

Se deriva la función:

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} = \frac{d2 \text{ sen } \theta \cos \theta}{d\theta} = 2\left[\text{sen } \theta \frac{d \cos \theta}{d\theta} + \cos \theta \frac{d \text{ sen } \theta}{d\theta}\right]$$

$$= 2[\text{sen } \theta(-\text{sen } \theta) + \cos \theta(\cos \theta)]$$

$$= 2[\cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta]$$

Pero $\cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta = \cos 2\theta$, entonces:

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} = 2 \cos 2\theta$$

Entonces

$$df(\theta) = 2 \cos 2\theta \, d\theta$$

4 Obtén la diferencial de la función $y = \text{arc sen}(1 - x^2)$

Solución

Se deriva la función:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\text{arc sen}(1 - x^2) = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)^2}}\frac{d}{dx}(1 - x^2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(1-2x^2+x^4)}}(-2x)$$

$$= \frac{-2x}{\sqrt{2x^2 - x^4}}$$

$$= \frac{-2x}{x\sqrt{2 - x^2}}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{2 - x^2}}$$

Por consiguiente, $dy = -\frac{2}{\sqrt{2 - x^2}}\,dx$

EJERCICIO 50

Determina la diferencial de las siguientes funciones:

1. $y = ax$
2. $y = ax^2 + bx + c$
3. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$
4. $s = \sqrt{t} - \sqrt[3]{t}$
5. $h(t) = (5 - 3t^2)^6$
6. $y = (x^2 - 2)^{-3}$
7. $y = \left(2 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$
8. $y = x\sqrt{x^2 + 2}$
9. $f(x) = (x - 1)^3(x + 3)^4$
10. $h(s) = \frac{2s - 1}{2s + 3}$
11. $g(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$
12. $y = \frac{x - 2}{\sqrt{x + 3}}$
13. $y = \sqrt{\frac{ax^2 + b}{ax^2 - b}}$
14. $f(x) = x - \cos 2x$
15. $f(t) = \tan^3 2t$
16. $y = (1 - \sec x)^2$
17. $g(x) = \frac{1 - \text{sen}\, x}{1 + \text{sen}\, x}$
18. $s(t) = \frac{\sqrt{\cos t}}{t}$
19. $f(x) = \sqrt{\frac{\sec x - 1}{\sec x + 1}}$
20. $y = \log(x^2 + 5)$

21. $y = \ln\sqrt{x^2 - 3}$

22. $y = \ln\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$

23. $y = e^{\sqrt{x^3}}$

24. $y = 2^{x^3+5}$

25. $h(t) = \frac{e^t}{e^t - e^{-t}}$

26. $f(x) = x^2 \ln x$

27. $f(x) = \text{arc cos } 2x$

28. $y = \text{arc tan}\frac{2}{x}$

29. $y = \text{arc sec}\sqrt{x}$

30. $y = \text{arc csc}(3x^3)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Aplicaciones de la diferencial

Sea $y = f(x)$ una función, si se da a x un incremento Δx, la variable y recibe un incremento Δy, que se considera un valor muy próximo a dy, entonces el valor aproximado de $f(x + \Delta x)$ es:

$$f(x + \Delta x) \approx y + \Delta y \approx y + f'(x)dx \approx y + dy$$

A esta expresión se le llama aproximación lineal y sirve para aproximar valores de funciones.

Aproximación lineal

EJEMPLOS

1 Determina el valor aproximado de $\sqrt{25.020}$

Solución

Se asocia a la operación la siguiente función:

$$y = \sqrt{x}$$

Se busca un valor x próximo a 25.020, cuya raíz cuadrada sea exacta, en este caso $x = 25$, $y = \sqrt{25} = 5$; las veinte milésimas restantes se toman como la diferencial de la variable x.

$$dx = 0.020 = \frac{1}{50}$$

Se obtiene su diferencial:

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{25}}\left(\frac{1}{50}\right) = \frac{1}{500}$$

$$dy = \frac{1}{500}$$

Los valores se evalúan en la fórmula:

$$f(x + \Delta x) \approx y + dy$$

$$\sqrt{25.020} = \sqrt{25 + 0.02} \approx 5 + \frac{1}{500} \cong \frac{2501}{500} = 5.002$$

Por consiguiente, $\sqrt{25.020} \approx 5.002$

2 Determina el valor aproximado de $\sqrt[3]{70}$

Solución

Se asocia a la operación la siguiente función:

$$y = \sqrt[3]{x}$$

Se busca un valor x próximo a 70, cuya raíz cúbica sea exacta, en este caso $x = 64$, y las seis unidades restantes son tomadas como la diferencial de la variable x, es decir, $dx = 6$

Se obtiene la diferencial:

$$dy = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}dx$$

$$dy = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{64}\right)^2}(6) = \frac{1}{8}$$

Los valores se evalúan en la fórmula:

$$f(x + \Delta x) \approx y + dy$$

$$\sqrt[3]{70} = \sqrt[3]{(64+6)} \approx 4 + \frac{1}{8} = \frac{33}{8}$$

Por tanto, $\sqrt[3]{64} \approx \frac{33}{8} = 4.125$

3 Obtén el valor aproximado de cos 40°

Solución

La función asociada a la operación es:

$$y = \cos x$$

Se busca un valor x próximo a 40°, en este caso $x = 30° = \frac{\pi}{6}$, $y = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y los $10° = \frac{\pi}{18}$ restantes es el valor de la diferencial de x.

$$dx = \frac{\pi}{18}$$

Se obtiene su diferencial:

$$dy = -\text{sen } x \, dx$$

$$dy = (-\text{sen } 30°)\left(\frac{\pi}{18}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{18}\right)$$

$$dy = -\frac{\pi}{36}$$

Los valores se evalúan en la fórmula:

$$f(x + \Delta x) \approx y + dy$$

$$\cos 40° \approx \cos(30° + 10°) \approx \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{36} = \frac{18\sqrt{3} - \pi}{36} = 0.778758941$$

Finalmente, $\cos 40° \approx \frac{18\sqrt{3} - \pi}{36}$

Aproximación del aumento o disminución de funciones

Ejemplo

Al enfriar una placa cuadrada metálica de 8 cm de longitud, su lado disminuye un 0.03%. ¿Cuánto disminuirá porcentualmente su área?

Solución

Se determina cuánto disminuyó el lado de la placa, para ello se obtiene el 0.03% de 8.

$$(8)(0.0003) = 0.0024$$

Si x = lado de la placa, entonces $dx = -0.0024$ cm, el signo menos indica que decrece el lado.
Luego:
El área de la placa es:

$$A = x^2$$

La disminución en el área es:

$$dA = 2x\,dx$$

$$dA = 2(8\text{ cm})(-0.0024\text{ cm}) = -0.0384\text{ cm}^2$$

Por último, se determina qué porcentaje representa 0.0384 del área total de la placa, es decir:

$$A = x^2 = (8\text{ cm})^2 = 64\text{ cm}^2$$

$$\text{Porcentaje de la disminución de su área} = \frac{(0.0384\text{ cm}^2)(100\%)}{64\text{ cm}^2} = 0.06\%$$

Por lo tanto, el área disminuye 0.06%

Estimación de errores de magnitudes

Ejemplo

Se calculó la longitud del lado de un cuadrado y éste mide 2.5 cm, con un error de 0.02 cm. Determina el máximo error que se comete al medir el área del cuadrado.

Solución

El área se determina con la fórmula $A = x^2$, se obtiene la diferencial $dA = 2x\,dx$, al sustituir se obtiene $dA = 2(2.5\text{ cm})(0.02\text{ cm}) = 0.1\text{ cm}^2$; dA representa el máximo error cometido en la medición del área.

➲ **Error relativo y error porcentual.**

$$\text{error relativo} = \frac{dv}{v}\text{; error porcentual} = 100\frac{dv}{v}$$

Ejemplo

Se calculó el radio de una esfera y éste mide 4.5 cm con un error máximo de 0.035 cm. Calcula el error relativo y porcentual que se obtiene al medir el volumen.

Solución

Del problema se obtiene:

$$r = 4.5\text{ cm} \quad \rightarrow \quad dr = 0.035\text{ cm}$$

La fórmula del volumen es $v = \frac{4}{3}\pi r^3$ y su diferencial es $dv = 4\pi r^2 dr$

Entonces, el error máximo cometido al medir el volumen es:

$$dv = 4\pi r^2 dr = 4\pi(4.5\text{ cm})^2(0.035\text{ cm})$$

$$dv = 2.835\pi\text{ cm}^3$$

Luego, el volumen de la esfera con radio 4.5 cm es:

$$v = \frac{4}{3}\pi(4.5\text{ cm})^3 = 121.5\pi\text{ cm}^3$$

Por tanto, el error relativo es:

$$\frac{dv}{v} = \frac{2.835\pi\text{ cm}^3}{121.5\pi\text{ cm}^3} \rightarrow \frac{dv}{v} = 0.02\overline{3}$$

Y el error porcentual:

$$100\frac{dv}{v} = 100(0.02\overline{3}) \rightarrow 100\frac{dv}{v} = 2.\overline{3}\%$$

EJERCICIO 51

Calcula el valor más aproximado de las siguientes operaciones:

1. $\sqrt{86}$
2. $\sqrt[3]{35}$
3. $\sqrt[4]{20}$
4. sen 38°
5. $\sqrt{6} + \cos 50^\circ$
6. $\sqrt[3]{130} + 2\tan 63^\circ$
7. $(123.5)^{\frac{3}{2}}$
8. sen 53° − cos 44°
9. $\text{sen}^4\ 29^\circ$
10. cot 75°
11. Una placa circular de radio 3.8 cm, se introduce en un horno, aumentando su radio en 0.012 cm. ¿Cuál es el aumento en la superficie de la placa?
12. La longitud de las aristas de un cubo es de 5.9 cm cada una, se midieron con un error máximo de 0.032 cm. Determina el máximo error que se cometió al medir su superficie y volumen.
13. Se calculó el diámetro de la base de un cilindro circular y éste midió 7.2 cm, con un error máximo de 0.05 cm. Calcula el error máximo que se cometió al medir el volumen si la altura es constante e igual a 10 cm.
14. Se midió un lado de un cuadrado y se cometió un error máximo de 0.012 cm. Calcula la longitud de uno de sus lados si el error máximo que se cometió al medir su área es de 0.192 cm^2.
15. Calcula el error relativo y porcentual que se comete al medir el volumen y la superficie de una esfera, si su radio mide 12 cm y el error máximo que se cometió al medirlo es de 0.015 cm.
16. El error relativo que se comete al medir el área de un cuadrado es de 0.18, si el error que se comete al medir la longitud de uno de sus lados es de 0.01 cm. Encuentra la longitud de cada uno de los lados del cuadrado.
17. El error relativo al medir el volumen de una esfera es de 0.02. Calcula el error máximo cometido al medir su diámetro, si éste mide 3 cm.
18. Calcula el error relativo y porcentual que se comete al medir el área lateral de un cilindro de base circular, si al medir el diámetro de la base se obtiene 4.5 cm con un error máximo de 0.004 cm y la altura es de 5.6 cm.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente